

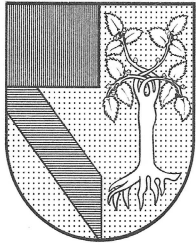
# UNIVERSIDAD PANAMERICANA CAMPUS GUADALAJARA

**CRISTOBAL ABRAHAM LARA RODRIGUEZ**

**Obtención de la relación entre el módulo de  
elasticidad estático y dinámico del concreto, medidos  
experimentalmente**

Tesis presentada para optar por el título de  
Licenciado en Ingeniero Civil Administrador  
con Reconocimiento de Validez Oficial de Estudios de la  
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA  
según acuerdo número 871472 fecha 07-Oct-1987

Zapopan, Jalisco, Julio 2015



# UNIVERSIDAD PANAMERICANA

CAMPUS GUADALAJARA

## DICTAMEN DEL TRABAJO DE TITULACION

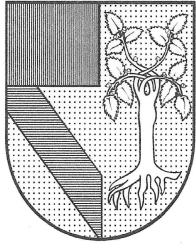
**C. CRISTOBAL ABRAHAM LARA RODRIGUEZ**  
Presente.

En mi calidad de Presidente de la Comisión de Exámenes Profesionales y después de haber analizado el trabajo de titulación en la opción TESIS titulado: **“Obtención de la relación entre el módulo de elasticidad estático y dinámico del concreto, medidos experimentalmente”** presentado por Usted, le manifiesto que reúne los requisitos a que obligan los reglamentos para ser presentado ante el H. Jurado del Examen Profesional, por lo que deberá entregar ocho ejemplares como parte de su expediente al solicitar el examen.

Atentamente

EL PRESIDENTE DE LA COMISIÓN

**ING. RODRIGO NAVARRO GUERRERO**



# UNIVERSIDAD PANAMERICANA

## CAMPUS GUADALAJARA

30 de Julio de 2015

ING. RODRIGO NAVARRO GUERRERO  
Universidad Panamericana  
Campus Guadalajara  
Escuela de Ingeniería Civil y Administración  
Comité de Titulación  
Presente

Estimado Ingeniero Navarro:

Por medio de la presente y en mi carácter de Asesor de Tesis de **Cristóbal Abraham Lara Rodríguez**, he revisado cuidadosamente el documento titulado **“Obtención de la relación entre el módulo de elasticidad estático y dinámico del concreto, medidos experimentalmente”**. Tesis que en mi concepto y en los términos establecidos por la Institución, reúne los requisitos de una tesis de carácter recepcional.

Sin más por el momento, quedo a sus órdenes para cualquier duda o comentario sobre el particular.

Atentamente

Dr. José Francisco de la Mora Gálvez  
Asesor de Tesis.

## AGRADECIMIENTOS

Son muchas las personas a las que quisiera agradecer y dedicar el esfuerzo y dedicación plasmada en este trabajo. Su finalización no habría sido posible sin el apoyo y conocimientos de estas personas.

Primero agradecer sinceramente y con especial cariño a mi asesor de tesis el Dr. Francisco de la Mora Gálvez, quien me motivó y sembró en mí la inquietud por titularme a través de este medio, así mismo me transmitió su curiosidad y pasión por el tema investigado, estando al pie del cañón con una admirable paciencia durante todo el proceso. Sus conocimientos, consejos y su orientación me resultaron fundamentales para poder llevar a buen término este trabajo. Definitivamente sin él esta tesis no podría haber sido. Quedo en deuda con él por todo lo que me aportó durante el periodo de realización de esta obra.

Además agradecer al actual director de la facultad de Ingeniería Civil y Administración de la Universidad Panamericana el Maestro Rodrigo Navarro Guerrero quien me apoyó en todos los temas administrativos y me incentivó a continuar con la tesis y a no darme por vencido.

Así mismo quisiera reconocer a mis sinodales, el Ing. Salvador Ismael Gómez Chávez y al M.I. Federico Alba González quienes se tomaron el tiempo y la dedicación para darme sus opiniones, comentarios y críticas constructivas para llevar a un mejor término este trabajo de investigación.

De la mano con el apoyo académico recibido quisiera agradecer y dedicar igualmente a mis amigos que me motivaron a que continuara y diera por terminada mi tesis. Quisiera mencionar de manera especial a: Javier Pérez Bouquet por sus consejos y por compartir su experiencia durante la realización de su tesis de maestría; A David Castellanos u a Mónica Huerta por su valiosa amistad dándome impulso en los momentos de duda; y a Rose Morales Rivera por brindarme su franqueza, motivación y cariño durante todos estos años de conocerla. Finalmente agradecer a mis hermanas Gabriela y Verónica por su apoyo en esos pequeños detalles que me ayudaron a mantener orden y un mejor aprovechamiento de mi tiempo dedicado a la tesis; A mi madre Rosa Rodríguez Aguilar y a mi padre José Luis Lara Mendoza, que en paz descanse, por la educación y valores que me brindaron y que gracias a ellos y con el favor de Dios he llegado a donde estoy ahora.

# ÍNDICE

<b>1. INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>1</b>
1.1. EL PORQUÉ DE LA TESIS.....	1
1.2. ANTECEDENTES.....	7
1.2.1 Comparativa entre el módulo dinámico y la resistencia a compresión.....	8
1.2.2 Comparativa entre el módulo dinámico y el módulo estático.....	9
1.2.3 Otras Investigaciones Afines.....	11
1.3. HIPÓTESIS Y OBJETIVOS.....	12
1.4. ALCANCE DE LA INVESTIGACIÓN.....	12
1.5. METODOLOGÍA.....	13
1.6. DESCRIPCIÓN DE LA TESIS.....	13
<b>2. MARCO TEÓRICO .....</b>	<b>15</b>
2.1. MÓDULO ELÁSTICO ESTÁTICO.....	15
2.1.1 Introducción.....	15
2.1.2 Repercusiones estructurales.....	17
2.1.3 Normativa existente.....	20
2.1.3.1 ASTM C 469-02 (ASTM) [1].....	20
Equipo, aparatos e instrumentos.....	20
Especímen de prueba.....	21
Procedimiento.....	22
Cálculos.....	22
2.1.3.2 NMX-C-128-1997-ONNCCE [14].....	24
2.1.3.3 ACI 318S-08 [1].....	25
2.1.3.4 RC-DF-04 [34].....	26
2.1.3.5 RC-GDL 97 [35].....	27
2.2. ANÁLISIS MODAL.....	28
2.2.1.1 Fundamentos estructurales.....	28
2.2.1.2 Segunda ley de Newton.....	29
2.2.1.3 Equilibrio Dinámico.....	29
2.2.1.4 Vibraciones libres no amortiguadas.....	30
2.2.1.5 Modos de vibrar.....	32
Compresión.....	33
Flexión.....	34
PROPAGACIÓN DE ONDAS MECÁNICAS.....	35
2.2.2 Onda P.....	35
2.2.3 Onda S.....	36
2.2.4 Ondas Superficiales.....	36
Onda Love – Ondas L.....	37
Ondas Rayleigh – Ondas R.....	37
2.3. MÓDULO ELÁSTICO DINÁMICO.....	37
2.3.2 Normativa Existente.....	40
2.3.2.1 ASTM C 215-97 [9].....	40
Cálculos.....	41
2.4. ANÁLISIS DE SEÑALES.....	43
2.4.1 Propiedades [42].....	43
2.4.1.2 Señales Par e Impar.....	44

2.4.1.3 Señales continuas exponenciales y senoidales.....	45
2.4.2 <i>Dominio de las Frecuencias</i> .....	46
2.4.2.2 Transformada de Fourier.....	48
2.4.2.3 Transformada Rápida de Fourier.....	51
<b>3. MEDICIÓN .....</b>	<b>52</b>
3.1. ESPECÍMENES.....	52
3.2. PRUEBA DINÁMICA.....	55
3.2.1 <i>Herramientas e Instrumentos de medición.</i> .....	55
Martillo .....	55
Bases de Apoyo.....	56
Hidrófono.....	57
3.2.2 <i>Metodología de medición.</i> .....	58
3.3. PRUEBA ESTÁTICA .....	61
3.3.1 <i>Equipo y Herramientas de Medición.</i> .....	61
Bases .....	61
Prensa .....	62
Anillos .....	63
Computador .....	63
3.4. OBSERVACIONES Y COMENTARIOS .....	67
<b>4. ANÁLISIS .....</b>	<b>68</b>
4.1. TRANSFORMACIÓN AL ESPECTRO DE FRECUENCIAS .....	68
4.2. FRECUENCIA FUNDAMENTAL .....	72
4.3. MÓDULO DE ELASTICIDAD DINÁMICO .....	78
4.4. MÓDULO DE ELASTICIDAD ESTÁTICO.....	80
4.5. OBSERVACIONES Y COMENTARIOS .....	82
<b>5. CONCLUSIONES .....</b>	<b>85</b>
5.1. INVESTIGACIONES AFINES .....	87

# TABLA DE FIGURAS

<b>FIGURA 1.1.</b> ESTRUCTURA DE CONCRETO ANALIZADA A MODO DE EJEMPLO PARA VER UNA COMPARATIVA EN LOS PERIODOS FUNDAMENTALES DE UNA ESTRUCTURA USANDO DISTINTOS MÓDULOS DE ELASTICIDAD. (MODELO PROPORCIONADO POR EL DESPACHO ALBA PROYECTO ESTRUCTURAL) .....	3
<b>FIGURA 1.2.</b> ESPECTRO DE DISEÑO SÍSMICO PARA UNA ZONA II SEGÚN EL REGLAMENTO DEL DISTRITO FEDERAL. ....	5
<b>FIGURA 1.3.</b> LOSA EN 3D (ANCHO UNITARIO).....	6
<b>FIGURA 1.4.</b> RELACIÓN ENTRE EL MÓDULO ESTÁTICO Y LA PROPORCIÓN AL MÓDULO DINÁMICO (ENCONTRADA EN [13] EL CUAL CITA A [17]) .....	10
<b>FIGURA 1.5.</b> RELACIÓN ENTRE EL MÓDULO DINÁMICO Y LA RESISTENCIA A LA COMPRESIÓN DEL CONCRETO (ENCONTRADA EN [13] EL CUAL CITA A [17]) .....	11
<b>FIGURA 2.1.</b> EXPLICACIÓN GRÁFICA DEL EFECTO DEL COEFICIENTE DE POISSON. ....	16
<b>FIGURA 2.2.</b> COMPRESÓMETRO A BASE DE ANILLOS [1].....	21
<b>FIGURA 2.3.</b> SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD: (A) FUERZA APLICADA; (B) FUERZA SÍSMICA INDUCIDA BASALMENTE. [35] ...	28
<b>FIGURA 2.4.</b> SISTEMA IDEALIZADO DE UN NIVEL PARA UN MARCO SUJETO A UNA FUERZA EXTERNA $P(T)$ EN LA DIRECCIÓN DEL GRADO DE LIBERTAD $(U)$ . ....	28
<b>FIGURA 2.5.</b> MASAS Y ALTURAS MODALES EFECTIVAS. [36].....	33
<b>FIGURA 2.6.</b> ESQUEMA DE LA PROPAGACIÓN DE LAS ONDAS-P. ....	35
<b>FIGURA 2.7.</b> PROPAGACIÓN DE ONDAS-S.....	36
<b>FIGURA 2.8.</b> ONDAS SUPERFICIALES (LOVE Y RAYLEIGH).....	37
<b>FIGURA 2.9.</b> ESQUEMA DE LA PRUEBA MEDIANTE RESONANCIA FORZADA. [9].....	40
<b>FIGURA 2.10.</b> ESQUEMA DE LA PRUEBA POR RESONANCIA POR IMPACTO. [9] .....	41
<b>FIGURA 2.11.</b> UBICACIÓN DE DISPOSITIVOS DE IMPULSO (VIBRACIÓN O IMPACTO) Y DEL SENSOR. [9].....	42
<b>FIGURA 2.12.</b> EJEMPLO DE LOS TIPOS BÁSICOS DE SEÑALES. LA DE LA IZQUIERDA UNA SEÑAL CONTINUA, LA IMAGEN DE DERECHA UNA SEÑAL DISCRETA. [42] .....	44
<b>FIGURA 2.13.</b> EJEMPLOS DE FUNCIONES CONTINUAS, PAR (A) E IMPAR (B). [42].....	45
<b>FIGURA 2.14.</b> EXPONENCIAL REAL CONTINUA $x(t)$ . (A) $A>0$ , (B) $A<0$ .....	45
<b>FIGURA 2.15.</b> EJEMPLO DE DESCOMPOSICIÓN DE UNA SEÑAL COMPLEJA EN SUMATORIO DE SEÑALES SIMPLES [43].....	47
<b>FIGURA 2.16.</b> EJEMPLO DE DESCOMPOSICIÓN DE UNA SEÑAL COMPLEJA EN SUMATORIO DE SEÑALES MÁS SIMPLES. [43].....	47
<b>FIGURA 2.17.</b> TERCER EJEMPLO DE DESCOMPOSICIÓN DE UNA SEÑAL COMPLEJA EN LA SUMA DE SEÑALES MÁS SIMPLES. [43]....	48
<b>FIGURA 2.18.</b> COMPARATIVA DE FUNCIONES SENO DE DISTINTAS FRECUENCIAS CON UN BLOQUE DE UNA SEÑAL QUE SE PRETENDE DESCOMPONER. [43].....	50
<b>FIGURA 2.19.</b> MECÁNICA DEL ANÁLISIS DE FOURIER. [44].....	50
<b>FIGURA 3.1.</b> UNO DE LOS ESPECÍMENES ENSAYADOS. SE APRECIA SU FORMA CILÍNDRICA Y UNA RELACIÓN ALTURA-DIÁMETRO IGUAL A DOS. ....	52
<b>FIGURA 3.2.</b> BÁSCULA UTILIZADA PARA LA MEDICIÓN DEL PESO DE LOS CILINDROS ENSAYADOS. ....	53
<b>FIGURA 3.3.</b> BASES DE CAUCHO DE SILICÓN PARA EL SOPORTE DEL CILINDRO DE CONCRETO. ....	56
<b>FIGURA 3.4.</b> HIDRÓFONO UTILIZADO EN LA REALIZACIÓN DE LA PRUEBA. EN LA IMAGEN SE ENCUENTRA COLOCADO SOBRE UNO DE LOS CILINDROS ENSAYADOS. ....	57
<b>FIGURA 3.5.</b> MODO DE APOYO REQUERIDO PARA LA MEDICIÓN DE LA FRECUENCIA FUNDAMENTAL LONGITUDINAL. SE MUESTRA TAMBIÉN LA UBICACIÓN DE LOS SENSORES SEGÚN [9].....	58
<b>FIGURA 3.6.</b> COLOCACIÓN DEL CILINDRO A ENSAYAR POR EL MÉTODO DINÁMICO.....	59
<b>FIGURA 3.7.</b> COLOCACIÓN DEL HIDRÓFONO DE MEDICIÓN MARCADO CON UN RECUADRO AZUL .....	59
<b>FIGURA 3.8.</b> ESQUEMA QUE INDICA EL PUNTO DONDE SE IMPACTARÁ AL CILINDRO.....	60
<b>FIGURA 3.9.</b> ESQUEMA DE TRANSMISIÓN DE LAS ONDAS EN EL CILINDRO, EN: (A) COMPRESIÓN; (B) FLEXIÓN; (C) TORSIÓN .....	60
<b>FIGURA 3.10.</b> ESPÉCIMEN YA ENSAYADO DONDE SE OBSERVAN LAS BASES UTILIZADAS EN SUS CARAS EXTREMAS. ....	62

<b>FIGURA 3.11.</b> PRENSA DONDE SE ENSAYARON LOS CILINDROS PARA OBTENER SU MÓDULO ELÁSTICO ESTÁTICO SEGÚN LA NORMA DE LA ASTM C 469 [1] .....	62
<b>FIGURA 3.12.</b> ANILLOS QUE SE SUJETAN AL CILINDRO DE CONCRETO CONECTADOS A UN DEFORMIMETRO PARA MEDIR LA DEFORMACIÓN LONGITUDINAL.....	63
<b>FIGURA 3.13.</b> PRENSA ENSAYANDO UNO DE LOS CILINDROS. SE PUEDE OBSERVAR LOS ANILLOS CON EL DEFORMIMETRO EN FUNCIONAMIENTO. ....	64
<b>FIGURA 3.14.</b> UNO DE LOS ENSAYOS REALIZADOS. SE OBSERVA LA VINCULACIÓN DEL COMPUTADOR CON DEFORMIMETRO Y PRENSA.....	64
<b>FIGURA 3.15.</b> OTRO DE LOS CILINDROS ENSAYADOS YA LLEGADO AL PUNTO DE CARGA MÁXIMA.....	65
<b>FIGURA 3.16.</b> FALLA DE UN CILINDRO ENSAYADO POR COMPRESIÓN.....	65
<b>FIGURA 3.17.</b> CILINDRO ENSAYADO CON STRAIN GAUGE COLOCADOS EN SU COSTADO. ....	66



## TABLA DE GRÁFICAS

<b>GRÁFICA 1.1.</b> MÓDULO DE ELASTICIDAD CONTRA $f'_c$ DE LOS CILINDROS DE CONCRETO ENSAYADOS PARA EL DESARROLLO DEL PRESENTE TRABAJO.....	2
<b>GRÁFICA 2.1.</b> DEFINICIÓN GRÁFICA DEL MÓDULO ELÁSTICO SECANTE (S/E).....	23
<b>GRÁFICA 2.2.</b> VIBRACIÓN LIBRE NO AMORTIGUADA. [38].....	32
<b>GRÁFICA 3.1.</b> EJEMPLO DE UN REGISTRO DE VIBRACIONES EN UNO DE LOS ENSAYOS.....	61
<b>GRÁFICA 4.1.</b> REGISTRO DE VIBRACIONES DEL ENSAYO #1 PARA EL CILINDRO C16_1049.....	69
<b>GRÁFICA 4.2.</b> REGISTRO DE VIBRACIONES DEL ENSAYO #2 PARA EL CILINDRO C16_1049.....	69
<b>GRÁFICA 4.3.</b> REGISTRO DE VIBRACIONES DEL ENSAYO #3 PARA EL CILINDRO C16_1049.....	69
<b>GRÁFICA 4.4.</b> REGISTRO DE VIBRACIONES DEL ENSAYO #4 PARA EL CILINDRO C16_1049.....	70
<b>GRÁFICA 4.5.</b> REGISTRO DE VIBRACIONES DEL ENSAYO #5 PARA EL CILINDRO C16_1049.....	70
<b>GRÁFICA 4.6.</b> REGISTRO DE VIBRACIONES DEL ENSAYO #6 PARA EL CILINDRO C16_1049.....	70
<b>GRÁFICA 4.7.</b> ACERCAMIENTO AL REGISTRO DE VIBRACIÓN DEL ENSAYO #6 DEL ESPÉCIMEN C16_1049, EN EL INTERVALO DE TIEMPO DE LOS 10 A 30 MILISEGUNDOS DEL ENSAYO. ....	71
<b>GRÁFICA 4.8.</b> RANGO DEL ESPECTRO DE FRECUENCIAS DE 0 A 6 KHZ, PARA LA PRUEBA #6 DEL CILINDRO C16_1049. ....	72
<b>GRÁFICA 4.9.</b> RANGO DEL ESPECTRO DE FRECUENCIAS DE 2 A 8 KHZ, PARA LA PRUEBA #6 DEL CILINDRO C16_1049. ....	72
<b>GRÁFICA 4.10.</b> ESPECTRO DE FRECUENCIAS PARA LA PRUEBA #1 DEL CILINDRO C16_1049. ....	73
<b>GRÁFICA 4.11.</b> ESPECTRO DE FRECUENCIAS PARA LA PRUEBA #2 DEL CILINDRO C16_1049. ....	74
<b>GRÁFICA 4.12.</b> ESPECTRO DE FRECUENCIAS PARA LA PRUEBA #3 DEL CILINDRO C16_1049. ....	74
<b>GRÁFICA 4.13.</b> ESPECTRO DE FRECUENCIAS PARA LA PRUEBA #4 DEL CILINDRO C16_1049. ....	74
<b>GRÁFICA 4.14.</b> ESPECTRO DE FRECUENCIAS PARA LA PRUEBA #5 DEL CILINDRO C16_1049. ....	75
<b>GRÁFICA 4.15.</b> ESPECTRO DE FRECUENCIAS PARA LA PRUEBA #6 DEL CILINDRO C16_1049. ....	75
<b>GRÁFICA 4.16.</b> ESFUERZO-DEFORMACIÓN DEL CILINDRO DE CONCRETO C16_1049. ....	81
<b>GRÁFICA 4.17.</b> MÓDULO DE ELASTICIDAD ESTÁTICO CONTRA MÓDULO DINÁMICO.....	84
<b>GRÁFICA 4.18.</b> GRAFICA DEL MÓDULO DE ELASTICIDAD SEGÚN LA NORMATIVA PARA ESTIMARLO CONTRA LOS RESULTADOS OBTENIDOS DE LOS ENSAYOS. ....	84
<b>GRÁFICA 5.1.</b> MÓDULO DE ELASTICIDAD ESTÁTICO CONTRA MÓDULO DINÁMICO.....	85
<b>GRÁFICA 5.2.</b> RELACIÓN ENTRE MÓDULO DE ELASTICIDAD ESTÁTICO Y MÓDULO DINÁMICO EXPRESADO EN $(N/cm^2)$ .....	86
<b>GRÁFICA 5.3.</b> VARIABILIDAD DEL MÓDULO DE ELASTICIDAD EN FUNCIÓN DEL $f'_c$ . SE TABULAN LAS RELACIONES PROPUESTAS POR DIVERSOS REGLAMENTOS.....	87
<b>GRÁFICA 5.4.</b> ILUSTRACIÓN QUE EJEMPLIFICA LA OBTENCIÓN DEL MÓDULO DE ELASTICIDAD ESTÁTICO.....	88

## INDICE DE TABLAS

<b>TABLA 1.1.</b> PRIMEROS 12 PERIODOS RESULTADOS DEL ANÁLISIS MODAL CON UN MÓDULO DE ELASTICIDAD DE $8000v_f'c$ $\text{kg/cm}^2$	4
<b>TABLA 1.2.</b> PRIMEROS 12 PERIODOS RESULTADOS DEL ANÁLISIS MODAL CON UN MÓDULO DE ELASTICIDAD DE $15,100 v_f'c$ $\text{kg/cm}^2$ .....	4
<b>TABLA 1.3.</b> COMPARATIVA DE LAS DEFORMACIONES AL CENTRO DEL CLARO EN UNA LOSA DE ANCHO UNITARIO, 20 CM DE PERALTE Y 6 M DE CLARO PARA DISTINTOS MÓDULOS DE ELASTICIDAD DADOS POR LOS REGLAMENTOS, PARA UN CONCRETO $f'_c$ DE $250 \text{ kg/cm}^2$ .....	6
<b>TABLA 2.1.</b> VALORES DEL MÓDULO DE ELASTICIDAD $E$ PARA DISTINTOS MATERIALES [24] .....	16
<b>TABLA 2.2.</b> VELOCIDAD DE CARGA PARA PRUEBA DE MÓDULO ELÁSTICO CON DISTINTOS REGLAMENTOS .....	24
<b>TABLA 2.3.</b> COEFICIENTES NUMÉRICOS “K” DEL MÓDULO DE ELASTICIDAD ACORDE AL RC-DF 04 .....	26
<b>TABLA 2.4.</b> REQUISITOS MÍNIMOS PARA EL MÓDULO DE ELASTICIDAD (RC-DF 04). PARA [34] LOS CONCRETOS DE ALTA RESISTENCIAS SON DEFINIDOS COMO AQUELLOS CON UNA RESISTENCIA A LA COMPRESIÓN IGUAL O MAYOR QUE $400 \text{ kg/cm}^2$ (CAPITULO 11.3.1 DE SUS NTC PARA DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO) .....	27
<b>TABLA 2.5.</b> VALORES DE $\beta nL$ PARA LAS CONDICIONES MÁS COMUNES DE APOYO. ....	39
<b>TABLA 2.6.</b> VALORES DE CORRECCIÓN “T” .....	43
<b>TABLA 3.1.</b> CILINDROS ENSAYADOS CON SU NOMENCLATURA, ALTURA, DIÁMETRO Y PESO. ....	54
<b>TABLA 3.2.</b> MEDICIONES EN LECTURAS DE CARGA CONTRA DEFORMACIÓN. ....	66
<b>TABLA 4.1.</b> PICOS ENCONTRADOS EN EL ANCHO DE BANDA DE 2 A 8 KHZ, PARA LA PRUEBA #1 (A) Y LA PRUEBA #2 (B) .....	77
<b>TABLA 4.2.</b> PICOS ENCONTRADOS EN EL ANCHO DE BANDA DE 2 A 8 KHZ, PARA LA PRUEBA #3 (A) Y LA PRUEBA #4 (B) .....	77
<b>TABLA 4.3.</b> PICOS ENCONTRADOS EN EL ANCHO DE BANDA DE 2 A 8 KHZ, PARA LA PRUEBA #5 (A) Y LA PRUEBA #6 (B) .....	77
<b>TABLA 4.4.</b> FRECUENCIAS FUNDAMENTALES DE CADA PRUEBA EN EL CILINDRO C16_1049. ....	78
<b>TABLA 4.5.</b> MÓDULOS DE ELASTICIDAD DINÁMICO PARA CADA UNA DE LOS ENSAYES DINÁMICOS PARA EL CILINDRO C16_1049. 80	
<b>TABLA 4.6.</b> VALORES DE ESFUERZO CONTRA DEFORMACIÓN UNITARIA PARA LA PRUEBA DEL MÓDULO ELÁSTICO ESTÁTICO DEL CILINDRO C16_1049. ....	81
<b>TABLA 4.7.</b> COMPARATIVA ENTRE LOS RESULTADOS OBTENIDOS DEL ANÁLISIS PARA EL CILINDRO C16_1049.....	82
<b>TABLA 4.8.</b> RESULTADOS OBTENIDOS DE LOS ANÁLISIS DINÁMICOS Y ESTÁTICOS DE LOS ESPÉCIMENES ENSAYADOS.....	83

# 1. INTRODUCCIÓN

## 1.1. El porqué de la tesis

En mi vida como estudiante universitario he tenido la particular inclinación hacia el área estructural y un especial interés en su comportamiento dinámico. Habiendo llevado cursos de diseño sismo resistente, que me han permitido comprender mejor los espectros sísmicos y la respuesta de las estructuras ante los estímulos dinámicos.

Aunado a lo visto en cursos tradicionales de diseño de concreto y mi experiencia profesional en el ámbito estructural, se puede constatar la importancia de un método preciso para la determinación del módulo elástico del concreto. Ya que este parámetro interviene directamente en la rigidez de una estructura, rigidez que a su vez determinará el periodo fundamental de vibración de la misma y nos regirá para el diseño por deformación con cargas de servicio.

En los reglamentos existentes se proponen diversas formas para estimar el módulo elástico, variando mucho entre distintos reglamentos. Por lo que muchas veces se diseña un edificio sin un valor real del módulo, lo que repercute en un periodo de vibración más largo o más corto del que en realidad posee la estructura, rigiéndose entonces por diferentes parámetros (aceleración, velocidad, desplazamiento) que puede no ser el mismo para el cual fue diseñado.

Algunos de los parámetros para calcular el valor del módulo elástico<sup>1</sup> son los siguientes:

- **ACI 318S-11** [1]
  - Propone un módulo de elasticidad igual a  $15,100\sqrt{f'_c}$
- **RC-DF**<sup>2</sup>
  - Para concretos con agregado grueso calizo  $14,000\sqrt{f'_c}$
  - Para concretos con agregado basáltico  $11,000\sqrt{f'_c}$
  - Para concretos clase 2 igual a  $8,000\sqrt{f'_c}$
- **RC-GDL**<sup>3</sup>
  - Para concreto de peso normal se considera  $10,000\sqrt{f'_c}$

Con esto se evidencia la gran variación entre los módulos elásticos propuestos por los distintos reglamentos existentes, llegando a ver una variación entre el módulo menor y mayor de un 89%. En los casos mencionados (que son los reglamentos utilizados en la región), se relaciona el módulo de elasticidad con la resistencia a la compresión del concreto, siendo este parámetro

---

<sup>1</sup> Todas las magnitudes del módulo de elasticidad están expresadas en  $\text{kg/cm}^2$

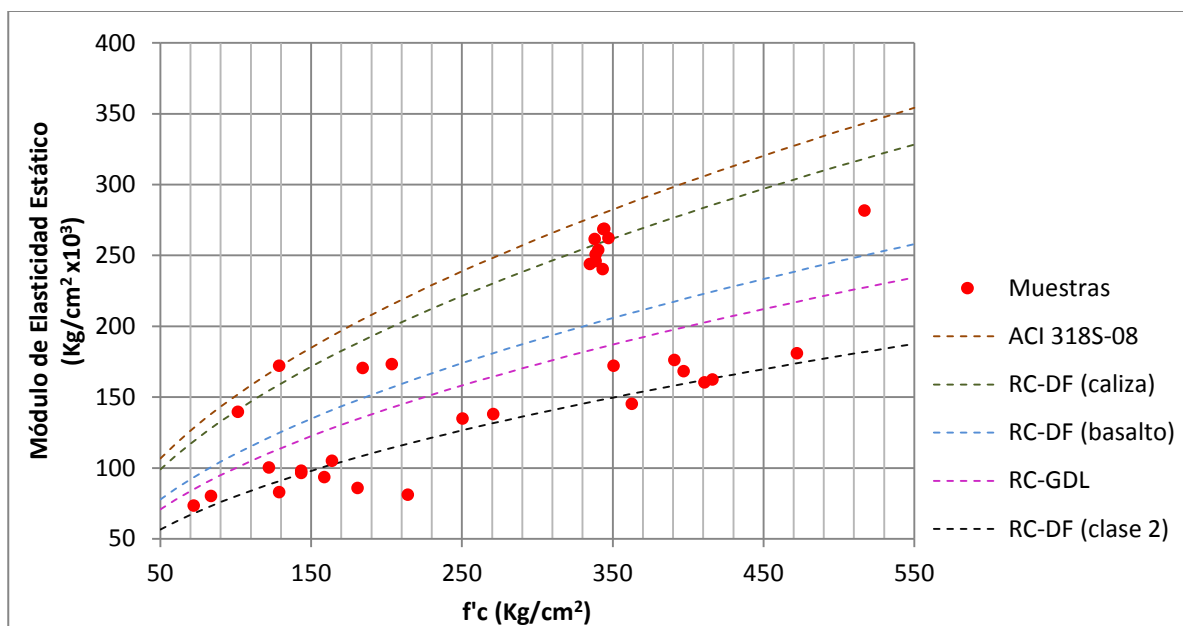
<sup>2</sup> Reglamento de Construcción del Distrito Federal, México

<sup>3</sup> Reglamento de Construcción de la ciudad de Guadalajara, Jalisco. México.

principalmente el único que se especifica para el concreto a utilizar, y del que se obtendrán pruebas de laboratorio avalando los valores de diseño de los concretos utilizados en obra.

Sin embargo muchas veces lo que realmente rige el comportamiento y diseño de una estructura de concreto son las deformaciones que varían directamente con el módulo elasticidad, es decir que podrían llegar a presentarse diferencias entre las deformaciones calculadas y las reales de hasta 89%. Por poner un ejemplo se podrían estar evaluando deformaciones de 2 cm, cuando en realidad se pudiesen estar deformando con magnitudes mayores de hasta 3.78 cm o en caso inverso con deformaciones más pequeñas de 1.06 cm. Siendo el caso más crítico el haber diseñado una estructura que en la realidad no cumplirá con los límites de servicio que marca la normativa, o por otro lado teniendo un cálculo conservador.

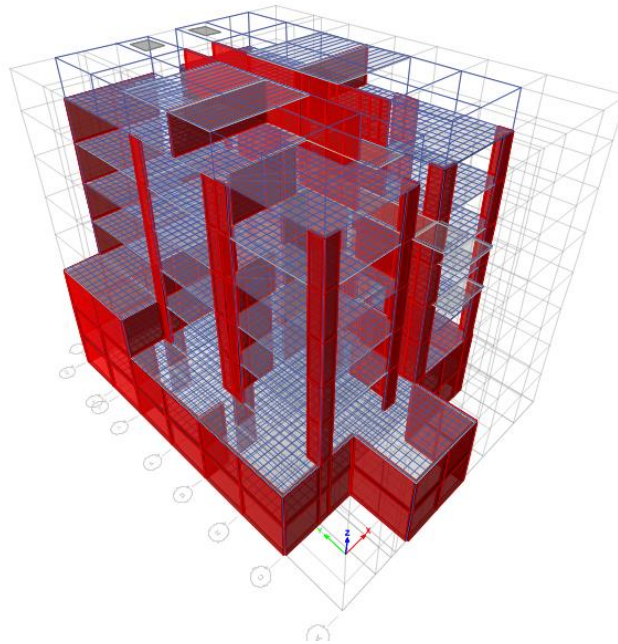
Para ejemplificar aún más la variabilidad que existe del módulo elástico cuando el único parámetro de referencia es el  $f'_c$ , sin considerar la densidad o los tipos de agregados. En la Gráfica 1.1 se plasman el módulo de elasticidad estático obtenido por la norma ASTM C469 de los cilindros de concreto ensayados durante la realización del presente trabajo, contra cada una de sus resistencias nominales ( $f'_c$ ). En la misma Gráfica 1.1, de forma ilustrativa, se observan las curvas correspondientes a las expresiones que marcan los distintos reglamentos para la obtención del módulo elástico estático.



**Gráfica 1.1.** Módulo de elasticidad contra  $f'_c$  de los cilindros de concreto ensayados para el desarrollo del presente trabajo.

Se observa en la Gráfica 1.1 la gran dispersión que tienen las muestras, algunas encontrándose por debajo que la menor de las expresiones propuestas por los reglamentos (RC-DF clase 2). Del resto de las muestras, la gran mayoría se adapta a la curva correspondiente al RC-DF (clase 2). No siendo esto lo que se esperaría ya que todos los cilindros ensayados se obtuvieron de la región aledaña a la ciudad de Guadalajara. Aunque la mayoría de las muestras, se acercan a la línea de RC-DF clase 2, una cantidad significativa de muestras, siguen estando alejadas, teniendo módulos elásticos mayores.

Tomando una estructura de concreto a modo de ejemplo de 6 niveles y 2 sótanos, utilizando para el análisis un concreto con  $f'_c$  de  $250 \text{ kg/cm}^2$ , y considerando dos distintos módulos de elasticidad (RC-DF clase 2 y ACI 318S-11) nos podemos hacer una idea del impacto que puede llegar a tener la variación del módulo elástico en un análisis dinámico espectral.



**Figura 1.1.** Estructura de concreto analizada a modo de ejemplo para ver una comparativa en los periodos fundamentales de una estructura usando distintos módulos de elasticidad. (Modelo proporcionado por el despacho ALBA Proyecto Estructural)

Con el parámetro del DF para concreto clase 2 igual a 8,000 veces la raíz del  $f'_c$  se obtiene del análisis modal un periodo fundamental igual a 0.542 s. La tabla completa con los primeros 12 modos se anexan en la Tabla 1.1

TABLE: Modal Periods and Frequencies					
Case	Mode	Period sec	Frequency cyc/sec	Circular Frequency rad/sec	Eigenvalue rad <sup>2</sup> /sec <sup>2</sup>
Modal	1	0.542	1.844	11.5857	134.2286
Modal	2	0.403	2.479	15.5779	242.6698
Modal	3	0.271	3.69	23.1818	537.3972
Modal	4	0.231	4.334	27.2289	741.4132
Modal	5	0.224	4.459	28.0157	784.8784
Modal	6	0.213	4.703	29.5475	873.0539
Modal	7	0.199	5.027	31.583	997.4859
Modal	8	0.194	5.143	32.3174	1044.4145
Modal	9	0.164	6.087	38.2465	1462.7944
Modal	10	0.156	6.395	40.1826	1614.6384
Modal	11	0.15	6.685	42.003	1764.2486
Modal	12	0.144	6.932	43.5581	1897.3124

**Tabla 1.1.** Primeros 12 periodos resultados del análisis modal con un módulo de elasticidad de  $8000\sqrt{f'_c}$  kg/cm<sup>2</sup>

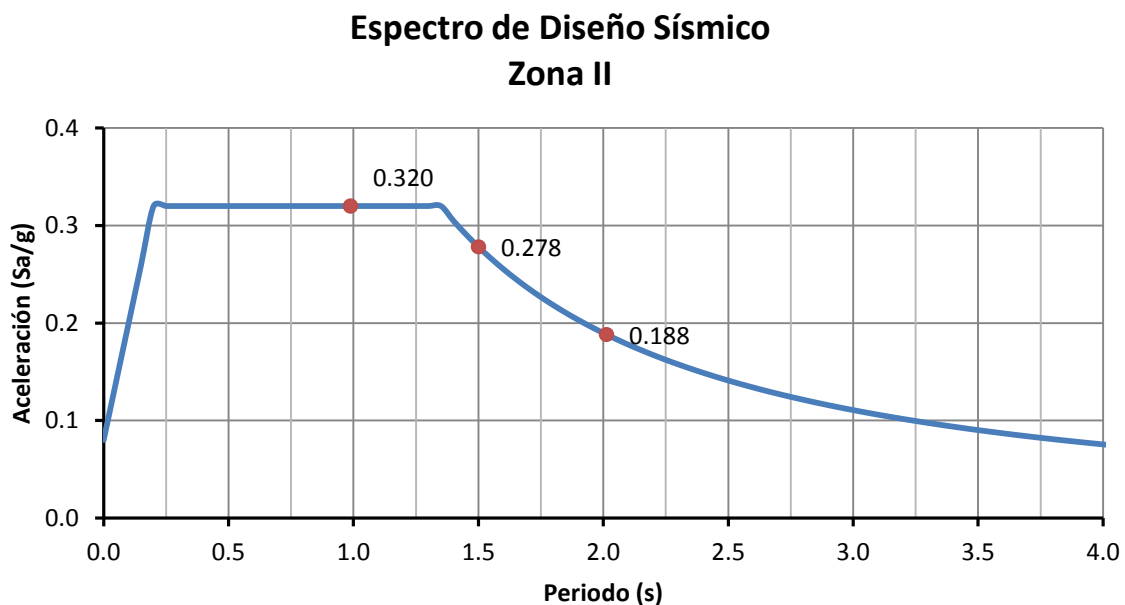
De forma análoga, utilizando el parámetro dado por el ACI318S-11 el cual nos indica un coeficiente de 15,100 que multiplica a la raíz de  $f'_c$ , se obtiene un periodo fundamental de 0.404 s. De igual manera se anexa la Tabla 1.2 con los doce primeros modos de vibrar.

TABLE: Modal Periods and Frequencies					
Case	Mode	Period sec	Frequency cyc/sec	Circular Frequency rad/sec	Eigenvalue rad <sup>2</sup> /sec <sup>2</sup>
Modal	1	0.404	2.474	15.5441	241.6204
Modal	2	0.307	3.26	20.4844	419.6101
Modal	3	0.235	4.251	26.7098	713.4117
Modal	4	0.199	5.022	31.5539	995.6498
Modal	5	0.192	5.2	32.673	1067.5241
Modal	6	0.186	5.374	33.7643	1140.0298
Modal	7	0.181	5.525	34.7172	1205.2837
Modal	8	0.155	6.453	40.546	1643.9801
Modal	9	0.143	7.014	44.0677	1941.959
Modal	10	0.137	7.323	46.0135	2117.2448
Modal	11	0.132	7.594	47.7169	2276.9005
Modal	12	0.124	8.077	50.7478	2575.3439

**Tabla 1.2.** Primeros 12 periodos resultados del análisis modal con un módulo de elasticidad de  $15,100\sqrt{f'_c}$  kg/cm<sup>2</sup>

Habiendo así una diferencia de 34.16 % en los periodos fundamentales calculados, diferencia porcentual considerable, aunque este tema requiere un mayor estudio debido a que la geometría de la propia estructura tiene gran importancia, no siendo exclusivamente dependiente del módulo elástico. Sin embargo nos da una noción de cuanto puede llegar a variar el periodo de vibración por solo tener un diferente módulo de elasticidad. Por ejemplo si esta proporción la aplicásemos a un edificio con periodo fundamental de 1.5s, la variabilidad iría desde 0.99 s hasta 2.01 s.

Esta diferencia es suficiente para que el periodo de la estructura se mueva lo suficiente en el espectro sísmico de diseño, para cambiar de rango que rige el diseño por aceleraciones al regido por velocidades, o del de velocidades al de desplazamientos, o en forma inversa. En la Figura 1.2 se aprecia el cambio en la aceleración espectral por un cambio en el periodo, encontrándose inicialmente en 0.278 g con el periodo original de 1.5 s, y variando de forma negativa para reducirse a 0.188 g con un periodo mayor (2.01 s) mientras que si por el contrario el periodo se redujese (con un módulo de elasticidad más alto) se tendría una aceleración espectral de 0.32 g. En ambos casos teniendo un gran impacto en el comportamiento y diseño de la estructura.



**Figura 1.2.** Espectro de Diseño Sísmico para una Zona II según el reglamento del Distrito Federal.

No servirá tanta sofisticación y precisión en el proceso de cálculo y diseño de las estructuras si los valores base, con los que se fundamenta el diseño son valores aproximados y no son igual de precisos que el resto del procedimiento. Por tanto, convendrá hacer énfasis en la evaluación del módulo elástico del concreto en obra, corroborando coincida o se encuentre dentro de un parámetro de los valores de diseño.

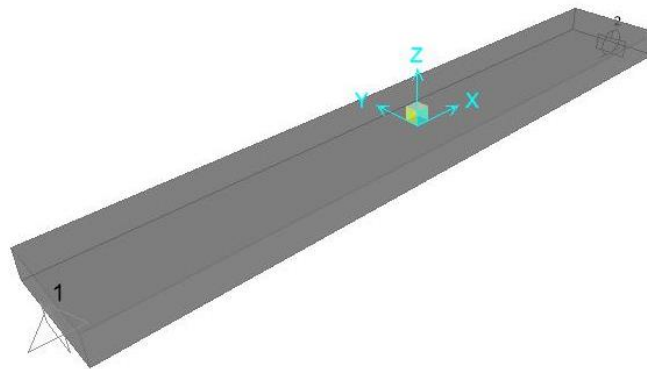
Para casos estáticos de diseño gravitacional, la diferencia entre deformación y el módulo elástico será prácticamente lineal, tomando como ejemplo una losa, para las cuales la selección de sus dimensiones las rigen las deformaciones permisibles. La evaluación de la losa se realizará considerando un ancho unitario y haciéndola trabajar como una viga simplemente apoyada, con un claro de 6 metros de claro y un espesor de 20 cm. Se destaca que para la siguiente revisión no se tomaron en cuenta los efectos de agrietamientos marcados por los reglamentos.

Tomando como carga viva  $350 \text{ kg/m}^2$  (Carga para rampas del reglamento de construcción del Distrito Federal). Y con una combinación de servicio, es decir sumando carga muerta y carga viva sin mayorar. El peso muerto considerado fue únicamente el peso propio del elemento.

Comparativa de Módulo de Elasticidad				
Reglamento	Módulo ( $\text{kg/cm}^2$ )	Deformación (cm)	Deformación Permisible (cm)	
			Normal	Muro
RC-DF (Concretos clase 2)	126,491	3.3	3.00	1.75
ACI 318S-11	238,752	1.75		

**Tabla 1.3.** Comparativa de las deformaciones al centro del claro en una losa de ancho unitario, 20 cm de peralte y 6 m de claro para distintos módulos de elasticidad dados por los reglamentos, para un concreto  $f'_c$  de  $250 \text{ kg/cm}^2$

Analizando con un concreto de  $f'_c$   $250 \text{ kg/cm}^2$  y usando los parámetros extremos dados por el mínimo del Distrito Federal y el dado por el ACI318-11. Se evaluaron las deformaciones obtenidas al centro del claro, para la sección descrita en el párrafo anterior. Obteniendo diferencias de casi el doble (88% mayores), diferencias que concuerdan con la diferencia entre los módulos de elasticidad, comprobando lo mencionado anteriormente, que para revisiones gravitacionales la relación es lineal. Esta diferencia puede significar que la deformación ya no cumpla con los reglamentos, como se ve en la Tabla 1.3, que en caso de que esa trabe estuviese sosteniendo un muro, la deformación permisible se vería excedida utilizando un módulo de elasticidad que no corresponde con el que se diseñó dicha losa



**Figura 1.3.** Losa en 3D (ancho unitario).



Por todo esto es necesario hacer conciencia sobre la importancia de la evaluación del módulo de elasticidad al momento de la construcción, el incluir como parámetro de diseño del concreto el módulo elástico. Puesto que este parámetro repercute tanto en las condiciones de diseño de cargas (análisis modal espectral), como el análisis de deformaciones. Por lo que al ser estimados, se corre el riesgo de estar sobre diseñando (y por tanto haciendo estructuras más costosas) o incluso sub diseñando y poniendo en riesgo la integridad de la estructura y de las personas dentro de ella.

El objetivo de esta tesis es encontrar una relación entre el módulo de elasticidad estático contra el módulo de elasticidad dinámico, para cilindros de concretos que cumplan con las dimensiones especificadas en la ASTM C469 [2] y utilizando agregados de la Zona Metropolitana de Guadalajara. Relación que permita llegar de forma certera al módulo de elasticidad estático (utilizado para el análisis estructural) haciendo uso de los métodos dinámicos, los cuales son más sencillos y rápidos de realizar, no requiriendo de equipo muy especializado como los que se requieren por el método estático.

## 1.2. Antecedentes

Los temas tratados en la tesis conciernen a las propiedades dinámicas de una mezcla de concreto con específicas características y una forma en específico, (las dimensiones estandarizadas por [2] para la prueba estática del módulo de elasticidad). Por lo que se ahondará de forma superficial en investigaciones pasadas relacionadas con las propiedades dinámicas del concreto, de cilindros y el comportamiento del módulo de elasticidad dinámico en relación al estático.

Se cita a continuación una breve historia del estudio de las propiedades dinámicas relacionándolas con el módulo de elasticidad de los materiales encontrada en [3] que ejemplifica muy claramente y a grandes rasgos los estudios hechos previamente en el campo.

En 1877 John W Rayleigh [4], en su libro “*Theory of Sound*” encontró una relación matemática entre la velocidad del sonido a través de un espécimen y su frecuencia de resonancia, así como la relación de estos dos módulos de elasticidad del material. La relación entre la frecuencia de resonancia y el módulo de elasticidad ya se ha encontrado. Para el caso de estudio, la frecuencia de resonancia requerida es la longitudinal, mas para encontrar el módulo cortante se requiere de la frecuencia de resonancia de vibración torsional.

En 1938, TC Powers [5] dejó las bases para las pruebas dinámicas de especímenes de concreto, siendo capaz de determinar la frecuencia fundamental de algunas muestras de concreto (de 2” x 2” x 9 ½”, apoyando los especímenes en sus puntos nodales a un tercio y dos tercios de su longitud, golpeando con un martillo y comparando el tono acústico producido con un una fuente sonora con determinado tono calibrado, utilizando campanas y un sonómetro casero.

Un año después en 1939, Hornibrook [6] refinó el método utilizando equipo electrónico para medir la resonancia. Otras investigaciones posteriores en este ámbito, fueron realizadas por

Thomson [7] en 1940, por Obert and Duvall [8] en 1941 y por Stanton [9] en 1944. En estas pruebas se utilizó un sonómetro para medir las frecuencias fundamentales de vibraciones de los especímenes involucrados. Estos métodos evolucionaron en un método aprobado por la ASTM y designándolo como el estándar ASTM C 215 [10].

A finales de la década de los 40's e inicios de los 50's, Jones [11] logró determinar el espesor y la rigidez del pavimento y capas subsecuentes utilizando ondas de superficie. Este método implicó la relación entre la longitud de onda y la velocidad de las vibraciones superficiales variando las frecuencias de vibraciones. Esta técnica no se popularizó para la medición de pavimentos de concreto sino hasta la década de 1980. Sin embargo investigadores de la Universidad de Texas, en Austin, a inicios de los 80's comenzaron estudios en técnicas en ondas de superficie utilizando un método de impacto en lugar de un vibrador de estado estable como el utilizado por Jones. La relación entre la longitud de onda y la velocidad se determinó usando un procesador digital de señales. El objetivo de este método era obtener la velocidad de las ondas de corte y perfiles del módulo de cortante de sitios geotécnicos utilizando ondas superficiales del tipo Rayleigh.

### 1.2.1 Comparativa entre el módulo dinámico y la resistencia a compresión

Así como Boone menciona en [3] que no es posible comparar la resistencia del concreto con las propiedades dinámicas, Neville lo menciona en [12] así: *“EL módulo de elasticidad dinámico calculado de la frecuencia de resonancia, no puede ser interpretada para representar la resistencia del concreto. Es solo bajo muy específicas y limitadas circunstancias de una mezcla de concreto que cambios en la resistencia pueden ser inferidos por cambios en el valor del módulo de elasticidad”*

De igual forma Jones en [11] escribe: *“A pesar de los resultados prometedores de investigaciones recientes, debe concluirse que no existe relación general entre el módulo de elasticidad del concreto y su resistencia a la flexión o compresión”*

De la declaración anterior, Jones también agrega *“correlaciones limitadas son obtenidas cuando los cambios en el módulo dinámico y la resistencia son producto de cambios en la edad del concreto, el grado de compactación, la proporción agua/cemento o por deterioro”* encontrando que una correlación razonable entre la resistencia a la compresión y la velocidad del pulso de vibraciones puede ser obtenido, pero estas correlaciones serán significativamente diferente si las proporciones de la mezcla del concreto son cambiadas.

Pruebas realizadas por Whitehurst [13] a finales de la década de 1950, en 180 especímenes prismáticos con dimensiones de 6"x6"x30" conformados por agregados típicos, se encontraron buenas correlaciones entre la resistencia a la compresión y sus propiedades dinámicas. Sin embargo se utilizaron cuatro tipos de cemento portland y la relación agua/cemento en tres diferentes mezclas. De cada una de las mezclas, 60 cilindros fueron elaborados. Cuando se

juntaban los resultados de todas las pruebas, no se tenía una correlación útil entre la resistencia a la compresión y la velocidad del pulso. Por otro lado si la edad del concreto se tomaba como variable y las mezclas se consideraban por separado, se pudo encontrar tres buenas correlaciones.

En [14] se menciona la imposibilidad de obtener una relación entre la resistencia a flexión o compresión con el módulo elástico dinámico, mencionando diversas fuentes e investigaciones que han reportado algunas relaciones para mezclas y situaciones muy específicas.

### 1.2.2 Comparativa entre el módulo dinámico y el módulo estático

Como se menciona en múltiples ocasiones en el desarrollo de este trabajo, el módulo de elasticidad utilizado para el diseño es el módulo estático de elasticidad, medido mediante compresión acorde a la norma correspondiente (ASTM C469 [2] o la NMX-C-128 [15]). Siendo la medición del módulo de elasticidad como una recta secante resultado de datos experimentales que relacionan el esfuerzo aplicado contra la deformación unitaria, esta recta va reduciendo su pendiente conforme se aumenta el esfuerzo aplicado en el concreto.

Boone [3] ya menciona parte de las hipótesis y objetivos que se plantean comprobar en esta investigación, menciona que las pruebas no destructivas para medir el módulo de elasticidad se desarrollan prácticamente solo en el rango elástico, debido a que los pequeños esfuerzos aplicados no llegan a producir agrietamiento en el concreto. Pudiendo cargar y descargar un espécimen sin afectar las propiedades lineales elásticas del material. Por esto es que el módulo dinámico puede considerarse igual a la tangente inicial del módulo de elasticidad determinado por métodos estáticos.

En [3] se menciona que en el libro de Neville [12] se describe que para concretos de alta resistencia, la pendiente esfuerzo-deformación de vuelve cada vez más lineal. De esta manera el modulo secante se aproximará cada vez más al módulo tangente y por tanto la proporción entre el módulo dinámico y el estático próximo a la unidad. Esta relación también se menciona en el estudio de Plachy, Padevet y Polak [16]

Investigaciones realizadas por Powers [5], Stanton [9], Philleo [17], Sharma and Gupta [18], Whitehurst [13] y Klieger [19] en la comparativa entre ambos módulos de elasticidad, dinámico y estático, se concuerda lo siguiente: ([3] y [14])

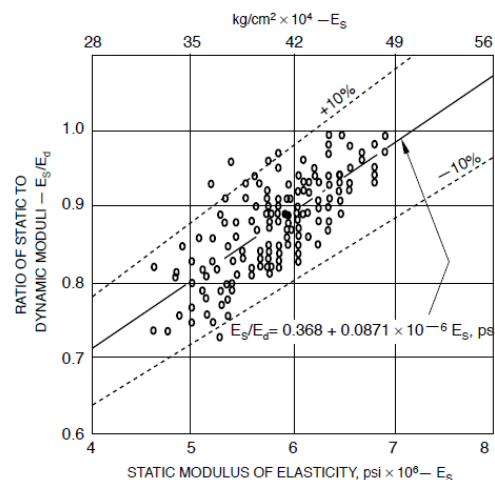
- El módulo de elasticidad dinámico es generalmente mayor al módulo estático
- Conforme aumenta el tiempo de fraguado del espécimen, la proporción entre modulo estático y dinámico, tiende a acercarse a uno.
- Para especímenes con módulos de elasticidad estáticos altos, los valores de ambos módulos, estático y dinámico, muestran concordancia.

No existe actualmente una conversión simple entre el valor del módulo dinámico al módulo estático, teniendo solo algunas relaciones empíricas validas solo en un rango limitado. Un ejemplo de esta es la que aparece en el libro de Neville [12]

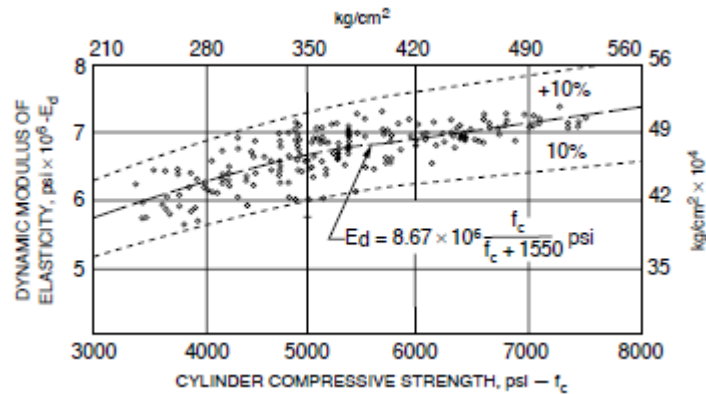
En el estudio realizado por Plachy, Padevet y Polak [16] se realizó una comparativa entre los distintos métodos de obtención del módulo elástico, el estático y el dinámico. Utilizando para el método estático el especificado en ASTM C469 [2] y para el dinámico el método de resonancia forzada indicada en ASTM C215 [10]. Si bien no se encuentra una relación entre ambos métodos, se reportan algunas características de los métodos, como ventajas del dinámico al tener poca variabilidad así como el poder repetir la prueba con el mismo espécimen al no dañarlo de ninguna manera, mientras que el estático arroja resultados con más dispersión por irregularidades geométricas en los apoyos, o fallas locales en los elementos al momento de la prueba de compresión conforme a ASTM C39 [20].

La investigación hecha por Malaikah, Al-Saif y Al-Zaid [21] también nos da luz en el tema, en cuanto a la diferencia entre el módulo de elasticidad estático y dinámico del concreto, con la particularidad de medir el módulo dinámico a diferentes grados de carga, encontrando que se tiene una reducción en el módulo elástico dinámico después de haberle aplicado carga a los especímenes probablemente debido a micro agrietamientos en el mismo. En sus conclusiones, determina que es necesario investigar por otros parámetros que afecten al módulo dinámico, como contenido de humedad, temperatura y proporciones de la mezcla.

En [14] también contiene una sección dedicada a la comparativa entre los módulos estáticos y dinámicos, pudiendo encontrar algunas relaciones como las que se muestran en la Figura 1.4 y Figura 1.5



**Figura 1.4.** Relación entre el módulo estático y la proporción al módulo dinámico (Encontrada en [14] el cual cita a [18])



**Figura 1.5.** Relación entre el módulo dinámico y la resistencia a la compresión del concreto (Encontrada en [14] el cual cita a [18])

### 1.2.3 Otras Investigaciones Afines

Además de investigaciones en el campo del concreto se han hecho en relación al módulo elástico dinámico de otros materiales de construcción, tal es el caso de la investigación de Nichols y Totoev [22] en donde se utilizan dos métodos no destructivos para determinar el módulo de elasticidad del concreto, además de métodos descritos en el trabajo mencionado como “quasi-estáticos”, para posteriormente comparar ambos resultados tanto dinámicos como estáticos. Para los resultados dinámicos se utilizó el coeficiente de Poisson proveniente de los procedimientos estáticos.

En [23] se hizo un estudio en cilindros de concreto con caucho reciclado, utilizando ensayos no destructivos ultrasónicos, determinando el módulo dinámico de Young. Así como estudiar el efecto del caucho en la atenuación de la onda ultrasónica longitudinal. Llegando a las conclusiones de que la velocidad de propagación de onda aumenta rápidamente en edades tempranas, estabilizándose para el octavo día; La velocidad de las ondas disminuyen de forma significativa en las mezclas con caucho, producto de micro fisuras y discontinuidades así como una baja densidad en el material.

En una investigación en la medición del módulo elástico realizada por Yoshihara [24], realizada sobre especímenes de madera conformada por fibras de densidad media (MDF por sus siglas en inglés), en el que se realizaron métodos de medición con vibración en flexión con ambos extremos libres, se llegó a las siguientes conclusiones:

- Al realizar un modelo de elementos finitos comparados con pruebas experimentales demuestran que es posible encontrar valores válidos del módulo de Young mediante métodos de vibración a flexión.

- Así mismo, el método de los elementos finitos arroja resultados que sugieren que el módulo de cortante no puede ser obtenido sin considerar la intervención del factor de cortante de Timoshenko en la configuración del espécimen así como del coeficiente de Poisson.
- Los experimentos de la investigación [24] indican que la influencia de la geometría del espécimen en el factor de cortante de Timoshenko es más significativo que el coeficiente de Poisson. Proponiendo que los especímenes deben tener un largo menor a 7.5 veces el peralte del elemento.

Si bien estas conclusiones son relevantes para tener en cuenta en el presente estudio, debido al método de obtención del módulo elástico por vibración a flexión, debe tenerse en cuenta que la relación de esbeltez en los especímenes de la investigación de Yoshihara es de gran relevancia al ser madera laminada, con uno de sus lados significativamente menor a las otras dos.

### 1.3. Hipótesis y Objetivos

Como hipótesis que fundamenta esta tesis, es que existe una correlación entre el módulo elástico dinámico y el módulo elástico estático. De forma que obteniendo uno es posible estimar el otro con suficiente exactitud, una exactitud mucho mejor que las actuales estimaciones dadas por los distintos reglamentos en función de la resistencia nominal del concreto ( $f'_c$ ).

Por lo que se buscará relacionar ambos módulos mediante una expresión matemática, así como estandarizar una forma sobre cómo medir el módulo elástico dinámico con la que se obtengan resultados más uniformes en concretos de la región.

### 1.4. Alcance de la Investigación

Esta investigación se limitará a probar cilindros de concreto aleatoriamente, es decir sin tener un control sobre la mezcla, tomando concretos con distintos tipos de agregados, distintos tiempos de maduración y distintas resistencias. No se medirá porcentajes de humedad, ni ninguna otra propiedad de los cilindros fuera de: altura, diámetro, peso.

Esto con el fin de demostrar que aun entre la gran variedad que puede llegar a haber entre distintos concretos, se puede realizar pruebas de bajo costo y con una confiabilidad muy alta, en comparación a los estimados que nos dan las fórmulas de los reglamentos.

Se probarán alrededor de 30 especímenes distintos, todos teniendo las dimensiones estándar para los lineamientos que da la norma de la ASTM C469 para la obtención del módulo elástico estático para cilindros de concreto.

## 1.5. Metodología

La metodología a seguirse para la elaboración de esta tesis, será primeramente definir los parámetros y metodología para la determinación del módulo elástico dinámico, para lo cual se usará teoría de análisis modal y de transmisión de ondas. Se desarrollará software que permita la evaluación automatizada de las distintas muestras de forma veloz.

Para cada cilindro se realizarán pruebas mediante un pequeño martillo con el cual se dará un golpe mientras se tiene un hidrófono localizado en una de las caras del cilindro. La ubicación del hidrófono variará y se grabarán los distintos registros de vibración en cada una de las posiciones colocadas. Además se colocará el cilindro sobre distintas bases y en diferentes posiciones. Todo esto con la finalidad de encontrar la mejor forma de efectuar la medición.

Posteriormente se procesarán los registros con los programas y formulas identificadas en la primera fase, descomponiendo las vibraciones del golpe en el dominio de las frecuencias, para así identificar la frecuencia fundamental de vibración en el modo de la compresión, frecuencia que se transformará en una velocidad de onda. Con la velocidad de onda se obtendrá el modulo elástico dinámico.

Cada cilindro del que se haya obtenido su módulo elástico dinámico con la metodología resumida en párrafos anteriores, se probará según la norma ASTM C469 [2] para la obtención del módulo estático, la cual especifica el uso de anillos con deformímetros que registren el cambio de longitud en el cilindro mientras se le aplica una carga con una velocidad de carga constante, hasta llegar al punto de falla, encontrando su resistencia a la compresión ( $f'_c$ ).

Una vez teniendo ambos módulos elásticos para cada cilindro, se graficarán los resultados y se buscará obtener una línea de tendencia con un error mínimo, que relacione ambos módulos.

## 1.6. Descripción de la tesis.

La tesis se compone de 5 capítulos, un primer capítulo introductorio que explica sin ahondar mucho en detalles sobre el rumbo que tiene la tesis, los resultados que se desean obtener y las investigaciones existentes relacionadas con el tema, el cual es obtener los módulos elásticos estáticos y dinámicos del concreto.

En el segundo capítulo, llamado Marco Teórico, se profundizará en el sustento teórico de la tesis, todos aquellos conocimientos que fundamentan los resultados y la metodología seguida; Tales como la obtención del módulo de elasticidad estático, definiciones básicas como la rigidez y los periodos fundamentales de vibración de las estructuras, y una breve introducción sobre el análisis de señales, proceso utilizado para la interpretación de los registros de vibración y llevarlos al dominio de las frecuencias.

El tercer capítulo describe el proceso de medición de los especímenes, profundizando aún más en la metodología seguida en cada uno de los ensayos realizados. Detallando las formas en que se grabaron los registros de vibración para los cilindros, en cada una de sus posiciones y con los diversos materiales de apoyo. Además describiendo en detalle el modo de ensaye de los cilindros para la obtención del módulo elástico estático, que aparece en la norma ASTM C469 [2].

Para el cuarto capítulo se hablará sobre el análisis realizado de los datos obtenidos en las mediciones. Es decir en el capítulo referente a las mediciones del cual se habla en el párrafo anterior, no se hablará del procesamiento de los datos obtenidos. Es hasta este cuarto capítulo donde se explica las formulas empleadas y se resumen los resultados de la información recolectada de los especímenes. Se muestran gráficas y tablas con los resultados finales.

Finalmente en el último capítulo, titulado Conclusiones, se comentan los resultados y gráficas del capítulo cuarto, emitiendo juicios relacionados con las hipótesis planteadas en el inicio de este trabajo, pudiendo comprobarlas o refutarlas. Además, de ser el caso, plantear nuevas hipótesis y recomendaciones para futuras investigaciones afines o cambios que se puedan llevar acabo en la presente investigación, para poder dar luz ante nuevos predicamentos que hayan resultado de esta investigación.



## 2. MARCO TEÓRICO

### 2.1. Módulo Elástico Estático

#### 2.1.1 Introducción

Todo material expuesto a un esfuerzo de tensión o compresión sufre una deformación debido a ese esfuerzo. El módulo de elasticidad longitudinal o módulo de Young, es la constante que guarda la relación del esfuerzo con la deformación de un material.

La relación de esfuerzo-deformación se conoce como la ley de Hooke, donde  $\sigma_{nx}$  es el esfuerzo aplicado en el sentido longitudinal,  $E$  es el módulo de Young y  $\epsilon_x$  es la deformación unitaria del material.

$$(2.1) \quad \sigma_{nx} = E * \epsilon_x$$

Diversos materiales sometidos a un determinado esfuerzo no sufren la misma deformación (No es lo mismo comprimir acero que comprimir plastilina). Lo que nos indica que cada material tiene una constante de elasticidad (módulo de Young) distinto, cuyas unidades según la ecuación (2.1) son iguales al del esfuerzo ( $[F] [L]^{-2}$ ). Para la gran mayoría de los materiales, dicho valor es constante, debido a la homogeneidad que existe en su fabricación y en la composición química del mismo.

En la Tabla 2.1 se puede apreciar los módulos elásticos de distintos materiales, donde es fácilmente apreciable por intuición, lo que la ecuación (2.1) ya nos sugería, que un módulo de elasticidad más grande se traduce en menores deformaciones dado un determinado esfuerzo, o dicho de otra manera, a mayor módulo elástico se requiere un esfuerzo mayor de tensión o compresión para obtener la misma deformación.

Para el caso del módulo de elasticidad del concreto, la situación ya no es tan fácil como determinar un único valor para todos los casos, ya que el concreto es un material heterogéneo en esencia, es decir sus componentes no se mezclan, solo se unen, siendo posible identificarlos a simple vista (agregado grueso y pasta). Además las propiedades de estos materiales por separado varían de concreto a concreto: La pasta depende del tipo de cemento utilizado, la relación agua-cemento utilizada y el proceso de curación del concreto; Mientras que los agregados finos y gruesos dependerá de los bancos de material disponibles en la región.

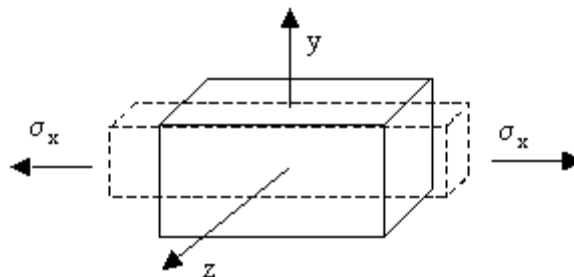
Material	E (kg/cm <sup>2</sup> )
Goma	85
Plomo	180,000
Hueso	210,000
Níquel	220,000
Magnesio	450,000
Aluminio, fundición (99% Al)	700,000
Fundición gris	1,050,000
Titanio	1,070,000
Latón (60% Cu, 40% Zn)	1,100,000
Cobre	1,100,000
Bronce (90% Cu, 10% Sn)	1,200,000
Acero	2,100,000
Zafiro	4,200,000
Grafeno	10,000,000

**Tabla 2.1.** Valores del módulo de elasticidad  $E$  para distintos materiales [25]

Un material al ser sometido a esfuerzos de tensión o compresión, además de sufrir una elongación o contracción, se puede apreciar simultáneamente un acortamiento o expansión de las dimensiones de la sección transversal (Figura 2.1). Estas deformaciones transversales se rigen por la expresión (2.2)

$$(2.2) \quad \varepsilon_{x,y} = -\mu \frac{\sigma_{x,y}}{E}$$

En donde  $\mu$  es el llamado coeficiente de Poisson, el cual al igual que el módulo de elasticidad, es constante para cada material (variando ligeramente en el concreto oscilando entre 0.15 y 0.20), para el acero se considera un valor de  $\mu=0.3$ . [25] Analizando la ecuación se concluye que el coeficiente de Poisson es un porcentaje de la deformación longitudinal vista en una deformación transversal.



**Figura 2.1.** Explicación gráfica del efecto del coeficiente de Poisson.

Sin embargo las ecuaciones presentadas anteriormente corresponden a los casos donde solo se tiene un esfuerzo aplicado en el sentido longitudinal y no se tiene ningún tipo de confinamiento en los sentidos ortogonales. Es decir  $\sigma_1 = \sigma_{nx}$  ;  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ .

Considerando un estado elástico tridimensional, se demuestra que las direcciones principales de ambas matrices son coincidentes. Utilizando el principio de superposición de efectos, las relaciones entre las deformaciones y esfuerzos principales se muestran en las ecuaciones (2.3) las cuales constituyen las leyes de Hooke generalizadas. Siendo  $G$  el módulo de elasticidad transversal, es decir la deformación debido a un esfuerzo cortante, este es función de  $E$  y de  $\mu$  (Ecuación (2.4) )

$$(2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)) \\ \epsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)) \\ \epsilon_3 = \frac{1}{E}(\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)) \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \end{array} \right.$$

$$(2.4) \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

Pudiendo observar que  $G$  tiene las mismas dimensiones de  $E$  es decir  $[F] [L]^{-2}$ , ya que  $\mu$  es adimensional y depende únicamente del material. [25]

### 2.1.2 Repercusiones estructurales

La importancia del módulo elástico en el análisis y diseño estructural es vasta, teniendo implicaciones en las deformaciones obtenidas en los elementos mecánicos de una estructura, tanto por cargas gravitacionales como accidentales, estando estas acotadas por los diversos reglamentos. Además interviene en la distribución de los esfuerzos en los elementos, ya que la rigidez, que es la que determina que elementos recibirán una mayor cantidad de fuerzas para que la estructura sea compatible por deformación entre los elementos que la conforman.

La rigidez, antes mencionada, como se ve en la ecuación (2.5) es la relación que existe entre la fuerza aplicada y la deformación del elemento en el sentido de la fuerza, por tanto, si la rigidez se relaciona con la deformación, es evidente que el módulo de elasticidad tiene implicación directa con la rigidez.

El método más popular para el análisis de las estructuras es el método de las rigideces mediante matrices, dada la facilidad de la programación y la solución de los sistemas matriciales gracias a la gran capacidad de cómputo actual de los ordenadores.

A diferencia del módulo de elasticidad, la rigidez es particular de un elemento, no solo depende del material que conforma el elemento, sino también de la forma geométrica del mismo.

$$(2.5) \quad K = \frac{F}{\delta}$$

Un mismo elemento tiene más de un valor de rigidez, uno por cada una de las formas en que se puede aplicar las fuerzas, dependiendo además de las condiciones de apoyo. Por ejemplo la rigidez de una barra sufriendo una fuerza de compresión y tensión axial, tiene una rigidez igual a la expresada en la ecuación (2.6) siendo directamente proporcional al módulo de elasticidad y al área del elemento, e inversamente proporcional a la longitud del mismo.

$$(2.6) \quad k = \frac{E A}{L}$$

Esta ecuación es fácil de demostrar mediante la sustitución de las definiciones de  $\sigma$  (2.7) y de  $\varepsilon$  (2.8) en la ecuación (2.1) y despejando para  $F/\delta$  que según (2.5) es la definición de rigidez.

$$(2.7) \quad \sigma = \frac{F}{A}$$

$$(2.8) \quad \varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

La rigidez axial (2.6) es sencilla de deducir, sin embargo para el análisis de una estructura tridimensional, que tiene fuerzas aplicadas de distinta índole (axial, de torsión, de flexión, de corte, y con distintos casos de apoyo). Es necesario el determinar de forma análoga las rigideces para todas estas fuerzas en sus diferentes sentidos de acción.

El análisis matricial usa la superposición de efectos y por tanto considera una matriz de rigidez de 12 x12 por cada uno de los elementos que componen el sistema, representando los 6 grados de libertad que tiene cada uno de los nodos (inicial y final) de los elementos. (Traslación en las 3 direcciones: x, y, z. y de rotación en los mismos 3 ejes). Considerando el elemento empotrado en cada uno de los casos y haciendo estas rigideces igual a cero cuando se encuentran restringidos por un soporte (es decir que no pueden sufrir deformación  $k \delta = F$ )

La matriz de rigidez local para un elemento en un espacio tridimensional se muestra en

$$k = \begin{pmatrix} \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I_z}{L^2} & 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I_y}{L^3} & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I_y}{L^3} & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{G \cdot I_p}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{G \cdot I_p}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I_y}{L^2} & 0 & \frac{4 \cdot E \cdot I_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I_y}{L^2} & 0 & \frac{2 \cdot E \cdot I_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4 \cdot E \cdot I_z}{L} & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2 \cdot E \cdot I_z}{L} \\ -\frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I_z}{L^2} & 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I_y}{L^3} & 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I_y}{L^3} & 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{G \cdot I_p}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{G \cdot I_p}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I_y}{L^2} & 0 & -\frac{2 \cdot E \cdot I_y}{L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I_y}{L^2} & 0 & \frac{4 \cdot E \cdot I_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2 \cdot E \cdot I_z}{L} & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4 \cdot E \cdot I_z}{L} \end{pmatrix}$$

(2.9)

No es el objeto de este trabajo el profundizar sobre el método matricial, si el lector desea ahondar en el tema puede consultar [26] y [27]. Mas ya con esta introducción en el tema, podemos observar que el módulo de elasticidad aparece en todos y cada uno de los términos de la matriz de rigidez. Inclusive en el grado de libertad del giro alrededor del eje axial (torsión), donde no aparece directamente  $E$ , sin embargo aparece  $G$  que según se vio en la ecuación (2.4) este depende de forma directa del módulo de Young ( $E$ ).

Por lo que una variación en el módulo de elasticidad tiene repercusiones desde el momento del análisis donde se calculan las fuerzas que tendrá cada uno de los elementos estructurales, dado que la distribución de estas fuerzas está en función de su rigidez, que como vimos en (2.9) depende a su vez del módulo de elasticidad.

Además de las implicaciones en los resultados del análisis estructural, también tiene implicaciones en si la estructura pasa la normativa existente, en específico hablando del ACI-318-11 [1] maneja límites de deflexión igual a  $1/240$  para sistemas de piso que soportan o están ligados a elementos no estructurales que no sean susceptibles de sufrir daños debido a grandes deformaciones y  $1/480$  para cuando los sistemas de piso soportan elementos que si son susceptibles a las deformaciones. Esta restricción también está dada en las Normas Técnicas Complementarias del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal. Tomo II [28]

De igual manera el reglamento del Distrito Federal en su Tomo II, Capitulo para el diseño estructural de las edificaciones, apartado 4.1 [28] condiciona el desplazamiento relativo entre dos niveles sucesivos de una estructura; Para elementos no estructurales que puedan sufrir daños bajo

pequeños desplazamientos, el límite es que el desplazamiento relativo sea igual o menor a la altura del entrepiso dividido entre 500; En otros casos la restricción se reduce a la altura del entrepiso dividida entre 250.

Es entonces evidente que el impacto que tiene el módulo de elasticidad en el diseño de estructuras de concreto. Una variación en el mismo tiene un impacto directo en toda la estructura, desde los resultados del análisis de fuerzas, hasta en parámetros de diseño, y como se mencionaba en el capítulo 1, al estar involucrado en la rigidez también impacta en el periodo fundamental de vibración de la estructura, el cual determina el cortante basal que experimentará en un evento sísmico dado un espectro sísmico de diseño.

### 2.1.3 Normativa existente

Existe distintas normativas para la obtención del módulo elástico que se utilizan actualmente, sin embargo para el interés de este trabajo nos enfocaremos en las siguientes dos, que son las que rigen en México.

#### 2.1.3.1 *ASTM<sup>4</sup> C 469-02 (ASTM) [2]*

En primera instancia tenemos la norma que nos proporciona Sociedad Americana de Pruebas y Materiales (ASTM por sus siglas en inglés) sobre la cual se basa la norma mexicana así como otras normas alrededor del mundo.

La norma nos indica que los valores obtenidos usualmente serán menores que el módulo elástico derivado de aplicaciones de carga rápida, por ejemplo cargas dinámicas o sísmicas, y de forma inversa, será mayor que los módulos obtenidos por cargas aplicadas de forma lenta o cargas de larga duración.

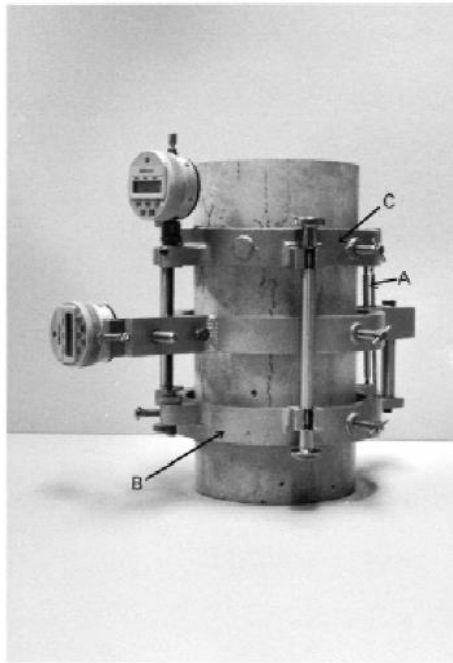
#### Equipo, aparatos e instrumentos

- Máquina de prueba  
Prensa capaz de imponer una carga lo suficientemente grande para llegar al menos hasta el 40% de la carga última, así como el aplicarla a una velocidad de carga dada.
- Compresómetro:  
Para determinar el módulo de elasticidad se requiere de un dispositivo capaz de medir las deformaciones longitudinales. Este dispositivo puede estar

---

<sup>4</sup> American Society for Testing and Materials.

completamente adherido al concreto (strain gauge) o no estarlo (cilindros con deformímetros).



**Figura 2.2.** Compresómetro a base de anillos [2]

- Extensómetro:  
Si además se desea conocer la relación de Poisson, se requiere un medidor de la deformación transversal, de igual forma pudiendo estar adherido al concreto o ser un elemento sin unión, solo en contacto, como es el caso de los deformímetros mostrados en la Figura 2.2
- Báscula:  
Una báscula con un rango de error de 0.045 kg.

### **Especimen de prueba**

Los especímenes a probar, deben cumplir los requerimientos para la prueba de compresión de la norma C 192/C 192M [29], o la norma C 31/C 31M [30]. Además los extremos de los especímenes deben ser perpendiculares al eje con un margen de error de  $\pm 0.5^\circ$  y completamente plano, con un margen de error de 0.05 mm. En caso de que los especímenes no cumplan con los requerimientos en sus caras extremas, éstas pueden ser conseguidas mediante la nivelación siguiendo la norma C 617 [31]

El diámetro del espécimen debe ser medido con un pie de rey o un instrumento que permita una exactitud de 0.25 mm, el dato a usar será el promedio de dos mediciones del diámetro hechas a ángulos perpendiculares, de este diámetro promedio se obtendrá el área.

### Procedimiento

Para realizar la prueba, la norma especifica el mantener un ambiente de humedad y temperatura tan constante como sea posible durante la duración de la prueba, y cualquier fluctuación en temperatura o humedad registrarla en el reporte.

Se deberá tener especímenes hermanos para determinar la resistencia a la compresión conforme lo establece el método de prueba de la norma C39/C39M [20], previo a la realización de la prueba del módulo de elasticidad.

Se coloca el espécimen, ya con el equipo que mide las deformaciones colocado en él, en la placa inferior o el bloque de carga de la máquina de prueba, alineando cuidadosamente el eje del cilindro con el centro de los bloques de carga, teniendo cuidado de colocar la placa superior de carga suavemente para obtener un asiento uniforme sobre la superficie.

En la norma se permite obtener el módulo de elasticidad y la resistencia del espécimen en el mismo proceso de carga, dado que los instrumentos de medición de la deformación (strain-gauges o deformímetros) sean desechables o se encuentren protegidos, de forma que se pueda llevar a cabo los requerimientos del proceso de carga continua especificado en la norma C39/C 39M [20]. En este caso es necesario registrar abundantes lecturas y determinar el valor de deformación al 40% de la carga última por interpolación.

Graficando las lecturas tomadas de al menos 3 especímenes de prueba con la deformación unitaria (la cual se define como la deformación total experimentada por el espécimen, dividida entre la longitud total del espécimen) en el eje de las abscisas y el esfuerzo de compresión en las ordenadas. El esfuerzo de compresión es el cociente de la carga aplicada entre el área transversal de la sección del espécimen.

### Cálculos

El módulo de elasticidad se calcula con la ecuación (2.10)

$$(2.10) \quad E = \frac{S_2 - S_1}{\epsilon_2 - 0.00005}$$

Dónde:

- E = Módulo de elasticidad secante (kg/cm<sup>2</sup>)
- S<sub>2</sub> = Esfuerzo correspondiente al 40% de la carga última del espécimen (kg/cm<sup>2</sup>)
- S<sub>1</sub> = Esfuerzo correspondiente a la deformación longitudinal  $\epsilon_1$  (50 millonésimas) (kg/cm<sup>2</sup>)
- $\epsilon_2$  = Deformación unitaria debida a S<sub>2</sub>

En caso de que se desee calcular el coeficiente de Poisson, se deberá calcular como sigue:

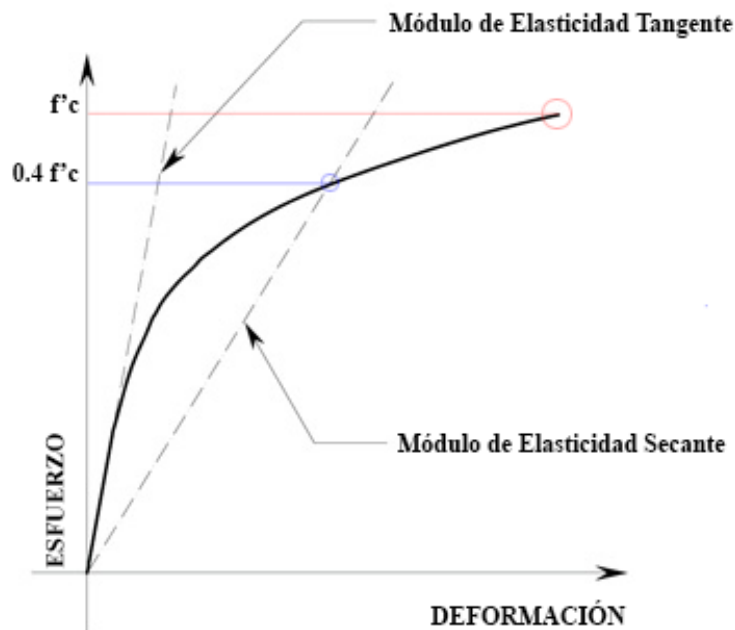


$$(2.11) \quad \mu = \frac{\epsilon_{t2} - \epsilon_{t1}}{\epsilon_2 - 0.00005}$$

Dónde:

- $\mu$  = Coeficiente de Poisson
- $\epsilon_{t2}$  = Deformación unitaria transversal al centro de la altura del espécimen, producida por el esfuerzo  $S_2$
- $\epsilon_{t1}$  = Deformación unitaria transversal al centro de la altura del espécimen, producida por el esfuerzo  $S_1$

En la Gráfica 2.1 se puede ver una definición gráfica de lo que representa el módulo de elasticidad acorde a la norma, en la gráfica de esfuerzo-deformación.



**Gráfica 2.1.** Definición gráfica del módulo elástico secante (S/E).

### 2.1.3.2 NMX-C-128-1997-ONNCCE5 [15]

La norma mexicana para la determinación del módulo de elasticidad estático y relación de Poisson, es muy similar a la norma descrita en 2.1.3.1. La preparación del cilindro es la misma, la metodología de medición, así como las fórmulas para la obtención de ambos términos (Módulo elástico y coeficiente de Poisson). Siendo las únicas diferencias apreciables la velocidad de carga recomendada.

Por un lado la norma C 469-02 [2], especifica una carga constante de  $35 \pm 5$  psi ( $2.461 \text{ kg/cm}^2$ ) / s; Mientras que la norma mexicana, da una velocidad de carga de 5 Ton/min ( $83.3 \text{ kg/s}$ ) durante las primeras 5 toneladas de carga (precarga), y una velocidad de 5 Ton/20 s. ( $250 \text{ kg/s}$ ) para el resto de la prueba. En la norma mexicana a diferencia de la de ASTM, no nos especifica la velocidad en un esfuerzo, asumiendo de esta manera que siempre se ensayará un cilindro de 15 cm de diámetro y 30 cm de altura, como ya también comentaba la norma C 469, haciendo referencia a la norma ASTM C 192 o la ASTM C31.

Por lo que para que sea posible compararlas, es necesario convertir la fuerza aplicada en un esfuerzo, dividiéndolo entre el área del cilindro estándar que considera la NMX-C-128 (es decir un área de  $176.72 \text{ cm}^2$ ). Obteniendo una velocidad de precarga de  $0.472 \text{ kg/cm}^2 \text{ s}$ , y una velocidad normal de  $1.42 \text{ kg/cm}^2 \text{ s}$ . Teniendo de esta forma una velocidad de carga significativamente menor.

Velocidad de carga por Norma			
	ASTM C469-02	NMX-C-128-1997-ONCCE	
Precarga	-	0.472	$\text{kg/cm}^2 \text{ s}$
Carga	2.46	1.415	$\text{kg/cm}^2 \text{ s}$

**Tabla 2.2.** Velocidad de carga para prueba de módulo elástico con distintos reglamentos

Además otra diferencia que existe en la norma mexicana, es que contiene un Apéndice Normativo “A.1” el cual exhorta la verificación de que el concreto cumpla con los valores de reglamentos o especificaciones, los cuales como se hablará más adelante, expresan el módulo de elasticidad en función de la raíz del  $f'_c$  del concreto, solo variando en un coeficiente, el cual la NMX-C-128 denomina como “K”. Por lo que la verificación del cumplimiento es obteniendo el coeficiente numérico de elasticidad (K) usando la siguiente expresión:

$$(2.12) \quad K = \frac{E}{\sqrt{f'_c}}$$

<sup>5</sup> Organismo Nacional de Normalización y Certificación de la Construcción y Edificación, S.C.

Dónde:

- E = Es el módulo de elasticidad secante obtenido en el ensaye  
 K = El coeficiente numérico del módulo de elasticidad  
 $f'_c$  = La resistencia del concreto a la compresión de proyecto.

Habiendo obtenido el coeficiente numérico, la norma indica que se debe presentar en el informe de resultados el valor numérico de “K” y como literales los demás datos de la expresión (2.13)

$$(2.13) \quad E = K \sqrt{f'_c}$$

### 2.1.3.3 ACI<sup>6</sup> 318S-08 [1]

Los reglamentos que se usan para el diseño estructural, como es el caso del ACI 318, si bien no mencionan un procedimiento para el ensaye del módulo elástico del concreto, pero si determinan que valor usar al momento de diseño. Puesto que como se describía anteriormente, el módulo de elasticidad del concreto varía en función de muchos parámetros, tales como los agregados, peso volumétrico, resistencia de la pasta. La gran mayoría de los reglamentos tratan de dar un parámetro de aproximación del módulo elástico (factor clave en el diseño de estructuras de concreto) en función de la resistencia del concreto (es decir del  $f'_c$ ).

En su capítulo 8.5 el ACI-318.11 menciona dos formas por las que se puede estimar el módulo elástico. El primero como se ilustra en la ecuación (2.14) está en función tanto del  $f'_c$  como del peso volumétrico del concreto. Sin embargo esta expresión solo es utilizable para concretos con peso específico entre 1,440 y 2,560 kg/m<sup>3</sup>. También se menciona en el mismo capítulo la expresión (2.15) la cual solo depende del valor de  $f'_c$  y es considerada para su uso en concretos de densidad normal.

$$(2.14) \quad E_c = w_c^{1.5} 0.14 \sqrt{f'_c}$$

$$(2.15) \quad E_c = 15100 \sqrt{f'_c}$$

En los comentarios del apartado 8.5 del ACI-318-11 se hace mención a dos referencias adicionales. Siendo la referencia [32] los resúmenes de los estudios en que se basó la norma para las expresiones (2.14) y (2.15) . En esta referencia se define el módulo de elasticidad del concreto como la pendiente trazada desde un esfuerzo nulo hasta un esfuerzo de compresión de 0.45  $f'_c$ .

---

<sup>6</sup> American Concrete Institute

Sin embargo la norma es consciente que el módulo de elasticidad del concreto es sensible al módulo de elasticidad del agregado, mencionando que puede diferir del valor especificado de un 80 a 120 %. También se hace la referencia en la norma a [2], como descripción de métodos para la determinación del módulo de elasticidad para el concreto.

#### 2.1.3.4 RC-DF-04 [33]

El reglamento de construcción del distrito federal en sus Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto [33], es mucho más amplio en cuanto a la definición de parámetros para la determinación del módulo de elasticidad.

En su capítulo 1.5 referente a la definición de los materiales y sus propiedades para su uso en el diseño de las estructuras, en él se encuentra el concreto estructural dividido en dos clases: clase 1, con peso volumétrico en estado fresco superior a  $2.2 \text{ T/m}^3$ ; y de clase 2 con un peso volumétrico en estado fresco entre  $1.9$  y  $2.2 \text{ T/m}^3$ .

Como características que el reglamento impone a los concretos clase 1, es que deben tener una resistencia a la compresión  $f'_c$  igual o mayor de  $250 \text{ kg/cm}^2$ . Mientras que el concreto clase 2, deberá ser de entre  $200$  y  $250 \text{ kg/cm}^2$ .

Las suposiciones que da [33] para el módulo de elasticidad del concreto difiere de los concretos clase 1 con los de clase 2, además, considera el tipo de agregado utilizado en su elaboración, pudiendo ser de roca caliza o basáltica en el caso del concreto de clase 1, mientras que para el de clase 2 no se subdivide, pero define al concreto de clase 2, el agregado grueso deberá tener un peso específico superior a 2.3 (contra un 2.6 del de clase 1). Se menciona la andesita como un posible agregado grueso para concretos de clase 2. En la tabla anexa a continuación se puede ver las diferentes definiciones para el módulo de elasticidad.

Coeficientes numéricos (K) del módulo de elasticidad según RC-DF 04*				
Tipo de Concreto		Tipo de agregado grueso		
		Calizo	Basáltico	Andesita**
	Clase 1	14,000	11,000	-
	Clase 2	-	-	8,000

\* Valores para  $\text{kg/cm}^2$

\*\* Ejemplo de agregado grueso, pudiendo ser otro.

**Tabla 2.3.** Coeficientes numéricos “K” del módulo de elasticidad acorde al RC-DF 04

Siendo el coeficiente “K” el que multiplica a la raíz de  $f'_c$  en la expresión (2.13) . Además este reglamento tiene un apartado especial para concretos de alta resistencia, con divisiones iguales a las de concreto clase uno y clase dos, es decir por el tipo de agregado grueso utilizado.

$$(2.16) \quad \begin{cases} E_c = 8500 \sqrt{f'_c} + 110\,000 & (\text{calizo}) \\ E_c = 8500 \sqrt{f'_c} + 50\,000 & (\text{básalticos}) \end{cases}$$

Para los concretos ligeros, el reglamento indica que su módulo de elasticidad debe determinarse experimentalmente, con un mínimo de 6 pruebas para cada resistencia y cada tipo de agregado.

De la misma manera, [33] determina que en obra, los requisitos mínimos que debe de cumplir el módulo de elasticidad de los cilindros de prueba, deberán ser al menos los mostrados en la Tabla 2.4, los cuales contienen una tolerancia a los valores dados en la Tabla 2.3 y las expresiones de (2.16).

Módulo de elasticidad a 28 días de edad, (kg/cm <sup>2</sup> ), mínimo					
	Alta Resistencia		Clase 1		Clase 2
	Caliza	Basalto	Caliza	Basalto	Andesita
Una muestra cualquiera	$8\,500 \sqrt{f'_c} + 84\,800$	$8\,500 \sqrt{f'_c} + 33\,200$	$12\,700 \sqrt{f'_c}$	$9\,700 \sqrt{f'_c}$	$7\,000 \sqrt{f'_c}$
Además promedio de todos los conjuntos de dos muestras consecutivas	$8\,500 \sqrt{f'_c} + 101\,100$	$8\,500 \sqrt{f'_c} + 44\,100$	$13\,500 \sqrt{f'_c}$	$10\,500 \sqrt{f'_c}$	$7\,400 \sqrt{f'_c}$

**Tabla 2.4.** Requisitos mínimos para el módulo de elasticidad (RC-DF 04). Para [33] los concretos de alta resistencias son definidos como aquellos con una resistencia a la compresión igual o mayor que 400 kg/cm<sup>2</sup> (Capítulo 11.3.1 de sus NTC para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto)

### 2.1.3.5 RC-GDL 97 [34]

El reglamento de Guadalajara en su capítulo VI, en el artículo 1661, indica que no debe utilizarse el supuesto del módulo de elasticidad que da el capítulo 8 del ACI 318, en su lugar propone considerarlo como:

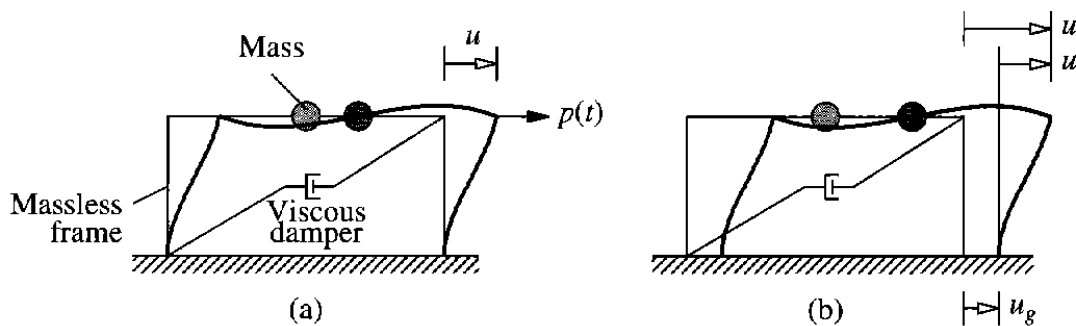
$$(2.17) \quad E_c = 10\,000 \sqrt{f'_c}$$

## 2.2. Análisis Modal

### 2.2.1.1 Fundamentos estructurales

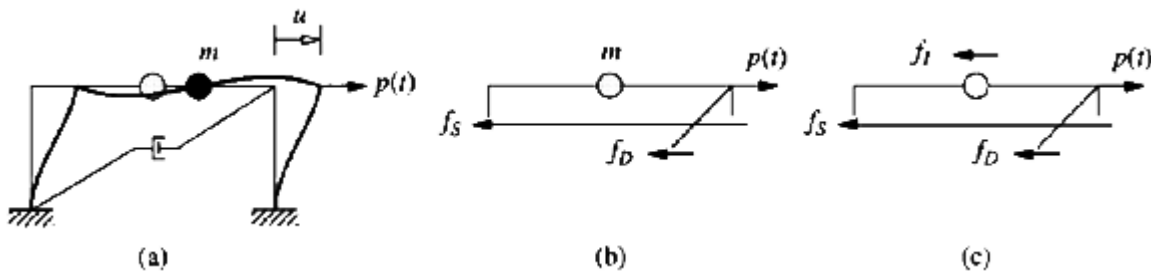
En esta sección se ahondará en la solución dinámica de problemas estructurales para un solo grado de libertad,

En esta sección se introducirá en la teoría del análisis dinámico de las estructuras, formulando los problemas para estructuras simples que pueden ser idealizadas como una masa concentrada y un soporte carente de masa. Limitándonos a sistemas elásticos de un grado de libertad. En la Figura 2.3 la cual fue tomada del libro de Dinámica de Estructuras de Anil Chopra [35], se muestra un marco de un vano con una masa concentrada a nivel de techo, el marco se considera carente de masa y este le proporciona la rigidez al sistema. Además se puede observar un disipador viscoso el cual disipa la energía del sistema. También se consideran las columnas y vigas infinitamente rígidas axialmente, es decir, que no pueden sufrir deformación longitudinal.



**Figura 2.3.** Sistema de un grado de libertad: (a) Fuerza aplicada; (b) Fuerza sísmica inducida basalmente. [35]

El movimiento sísmico o resultante de algún tipo de excitación, que se muestra en la Figura 2.3, puede ser remplazado por una función de fuerza  $p(t) = -m u''_g(t)$ . Siendo  $u(t)$  el desplazamiento relativo de la masa con respecto a la base del marco.



**Figura 2.4.** Sistema idealizado de un nivel para un marco sujeto a una fuerza externa  $p(t)$  en la dirección del grado de libertad ( $u$ ).

En la Figura 2.4(a) [35] se muestra un modelo idealizado de la Figura 2.3 siendo remplazada la fuerza actuante por  $p(t)$ , es decir una fuerza “ $p$ ” que varía en función del tiempo “ $t$ ”. Se puede concluir la ecuación diferencial que determina el desplazamiento  $u(t)$  mediante dos métodos: (1) La segunda ley de Newton y (2) por equilibrio dinámico.

### 2.2.1.2 Segunda ley de Newton

En la parte (b) de la Figura 2.4 se muestran las fuerzas actuando sobre la masa en el instante de tiempo  $t$ . Siguiendo la nomenclatura siguiente

- $p(t)$  la fuerza actuando en el sentido del desplazamiento.
- $f_s(t)$  la fuerza elástica oponiéndose al movimiento
- $f_D(t)$  la fuerza del amortiguador oponiéndose a la deformación.

La fuerza resultante en el eje “ $x$ ” o en el sentido del movimiento es:  $p(t) - f_s(t) - f_D(t)$ , por lo que a partir de la segunda ley de Newton, se obtiene la siguiente ecuación de equilibrio para el sistema:

$$(2.18) \quad p(t) - f_s(t) - f_D(t) = m u''(t)$$

Que sustituyendo por términos diferenciales en función del desplazamiento y despejando para  $p(t)$  obtenemos la equivalencia:

$$(2.19) \quad m u''(t) + c u'(t) + k u(t) = p(t)$$

Dónde:

- $c$  = Factor de amortiguamiento  
 $k$  = La rigidez del sistema en el sentido del desplazamiento

### 2.2.1.3 Equilibrio Dinámico

El principio de D’Alembert de equilibrio dinámico se basa en la noción de una fuerza inercial ficticia, una fuerza igual al producto de la masa por la aceleración y actuando en contra de la dirección de la aceleración. El principio determina que un sistema dinámico que incluye las fuerzas inerciales, se encuentra en equilibrio en todo momento. Por tanto siendo posible dibujar un diagrama de cuerpo libre de una masa en movimiento y por principios estáticos desarrollar una ecuación dinámica.

El apartado (c) de la Figura 2.4 es el diagrama de cuerpo libre en el instante de tiempo “ $t$ ” con la masa habiendo sido remplazada por su fuerza inercial. Haciendo la suma de todas estas fuerzas e igualándolas a cero, resultamos en la ecuación (2.19) , la cual se derivó previamente usando la segunda ley de Newton.

#### 2.2.1.4 Vibraciones libres no amortiguadas

Para un sistema no amortiguado ( $c=0$ ) la ecuación (2.19) deducida anteriormente, se escribe:

$$(2.20) \quad m u''(t) + k u(t) = p(t)$$

Esta expresión es una ecuación diferencial con coeficientes constantes. Conforme a la teoría de las ecuaciones diferenciales, la solución del problema comprende una solución de la ecuación homogénea [36].

$$(2.21) \quad m u''(t) + k u(t) = 0$$

Mas una solución particular adecuada a la carga  $p(t)$ . En términos físicos, la ecuación homogénea equivale a un sistema en un estado libre de vibración, es decir, a una vibración que se produce el cuerpo desde una posición inicial  $u_0 = u(0)$  (sin una fuerza aplicada) y debido a este desplazamiento obteniendo una velocidad inicial  $u'_0 = u'(0)$  y dejarlo oscilar libremente, sin un amortiguamiento que frene la oscilación.

Pudiendo escribir la ecuación (2.21) de forma más simple cómo:

$$(2.22) \quad u''(t) + \omega^2 u(t) = 0$$

Donde

$$(2.23) \quad \omega^2 = k/m$$

Suponiendo condiciones iniciales  $u_0$  y  $u'_0$ , se busca una solución del tipo

$$(2.24) \quad u = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

Donde A y B son constantes por determinar. Como el desplazamiento en el instante inicial es conocido, resulta posible calcular inmediatamente el valor de una de ellas haciendo  $t = 0$  obteniendo



$$(2.25) \quad B = u_0$$

De forma análoga sobre la derivada de la expresión (2.24)

$$u'' = A \omega \cos \omega t - B \omega \sin \omega t$$

Haciendo  $t = 0$

$$(2.26) \quad u'_0 = A \omega$$

Derivando una segunda vez, se obtiene la expresión para la aceleración del sistema:

$$(2.27) \quad u'' = -A \omega^2 \sin \omega t - B \omega^2 \cos \omega t$$

Pudiendo así sustituir en la expresión original (2.22) se obtiene:

$$(2.28) \quad u = \frac{u'_0}{\omega} \sin \omega t + u_0 \cos \omega t$$

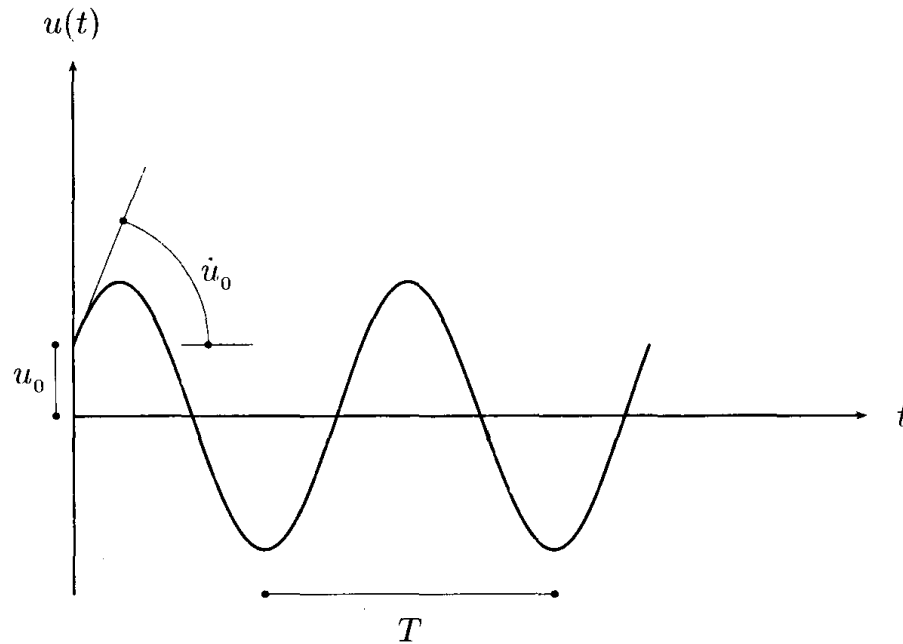
Constando, la ecuación anterior, de dos funciones armónicas de igual argumento pero con constantes de amplitud diferentes. La constante que determina el argumento de las funciones armónicas,  $\omega$ , se conoce como frecuencia angular natural, ya que es una propiedad del sistema tal como describe la ecuación (2.23). Un esquema de solución de (2.28) aparece en la Gráfica 2.2 tomada del libro de Introducción a la Dinámica de Estructuras de Jorge Hurtado Gómez [37]. En este esquema se observa el intervalo de tiempo en el que se repiten los valores de la respuesta, llamado **periodo**.

Como las funciones seno y coseno repiten sus valores cada  $2\pi$  radianes, el valor del periodo se deduce de:

$$(2.29) \quad \omega T = 2\pi$$

Y por tanto:

$$(2.30) \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$



**Gráfica 2.2.** Vibración libre no amortiguada. [37]

### 2.2.1.5 Modos de vibrar

Las estructuras al sufrir un impulso cualquiera, no vibran de una sola manera. En el tema antes tratado se trabajó con un solo grado de libertad, una estructura o sólido tendrá tantos modos de vibrar como grados de libertad posea.

Por lo que cada modo (o grado de libertad) tiene su propio periodo o frecuencia fundamental, la cual depende de la rigidez y la masa que actúa en dicho grado de libertad.

Al tener distintas rigideces y masas, algunos modos siendo más rígidos y por tanto requiriendo una mayor cantidad de energía para excitarlos, hay modos que tienen poca participación en el comportamiento modal de toda la estructura o sólido.

En la Figura 2.5 tomada del libro de Chopra, se ejemplifica gráficamente sobre el ejemplo de un marco plano de 5 niveles, la descomposición modal de la estructura. Pudiendo observar que en este caso el primer modo es quien más predominancia tiene en el comportamiento modal del marco, al tener la mayor cantidad de masa participando con el 88% ( $4.398m/5m$ ), mientras que el segundo modo participa en un 8.7% ( $0.436m/5m$ ).

El cálculo de las masas modales efectivas no es tema de este trabajo, pero el lector puede consultar en [35] y [37].

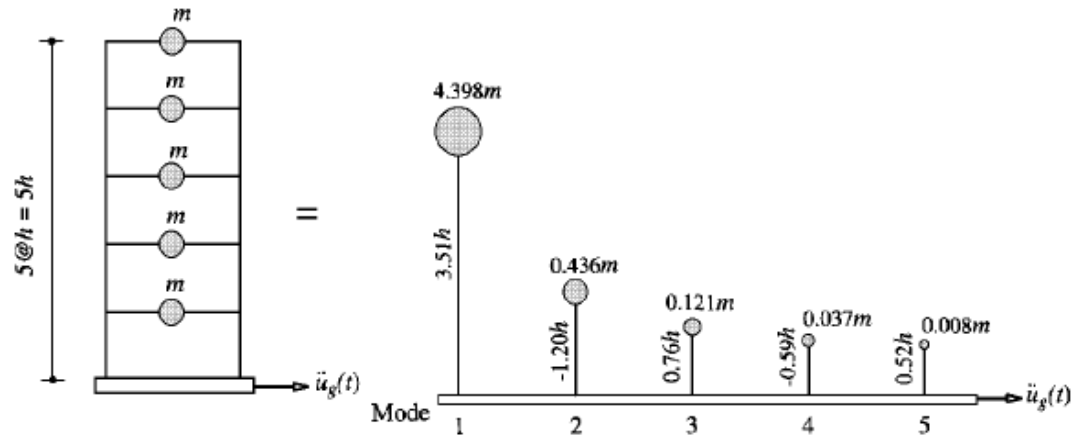


Figura 2.5. Masas y alturas modales efectivas. [35]

### Compresión

Para una barra solida con grado de libertad axial, la rigidez en este sentido se dedujo en el capítulo 2.1.2, resultando en la expresión (2.6) , sustituyéndola en (2.23) se obtiene

$$(2.31) \quad \omega^2 = \frac{EA}{Lm}$$

Sabiendo que

$$(2.32) \quad f = \frac{1}{T}$$

Donde

$$\begin{aligned} f &= \text{Frecuencia} \\ T &= \text{Periodo} \end{aligned}$$

La ecuación (2.30) se puede expresar de la siguiente manera:

$$(2.33) \quad f = \frac{\omega}{2\pi}$$

Entonces introduciendo (2.31) en la expresión anterior, se tiene

$$(2.34) \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{EA}{Lm}}$$

## Flexión

De forma análoga para una barra con grado de libertad en un sentido ortogonal al axial, en uno de sus extremos, al sufrir una deformación. Por lo que es posible obtener la rigidez dada su definición como “*la fuerza generalizada necesaria para producir un desplazamiento generalizado unitario fijando el resto de los grados de libertad*” [38].

Tradicionalmente se deriva la expresión de rigidez mediante la integración directa de la ecuación diferencial de la deflexión de la viga dada en la siguiente expresión:

$$(2.35) \quad \frac{d^2 \bar{u}_y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

Que después de realizar la integración y sustitución de las constantes de integración con ayuda de las condiciones de frontera:

En extremo inicial en donde se observa la deformación unitaria buscada.

$$x = 0 \quad \theta = 0$$

$$x = 0 \quad \bar{u}_y = 1$$

En el extremo final.

$$x = L \quad \theta = 0$$

$$x = L \quad \bar{u}_y = 0$$

Obteniendo como rigidez a flexión el término (2.36) , teniendo como condición de apoyo un empotramiento. (Sin permitir giros en ninguno de los dos extremos)

$$(2.36) \quad k = \frac{12 EI}{L^3}$$

La deducción completa tanto de este como de otros grados de libertad el lector puede encontrarlos en [26]

## Propagación de Ondas Mecánicas

Existen tres tipos de ondas en los medios sólidos que se consideran las más importantes. [38]

### 2.2.2 Onda P

Consisten en un movimiento longitudinal que provoca la dilatación y compresión en el sentido en que viaja la onda. Estas se transmiten a través de sólidos como pueden ser las rocas como granito o inclusive en líquidos como magma volcánico o el agua de los océanos. En su forma se comporta como las ondas sonoras por lo que en un medio sólido, cuando éstas alcanzan su superficie se transmiten a la atmósfera como ondas sonoras, las cuales, dependiendo si su frecuencia se encuentra en el espectro audible, pueden llegar a ser oídas por las personas.

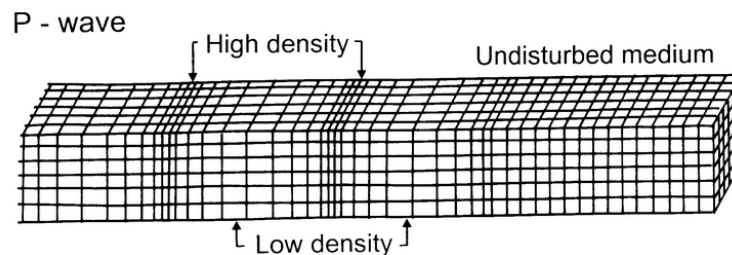
Es el tipo de onda más rápida, por lo que llega primero de un punto a otro, razón por la que también se le denomina onda primaria. (Se asocia a la palabra “push” por el tipo de movimiento que interviene en su transmisión.)

La velocidad de una onda P (onda primaria, onda de compresión, onda de dilatación), en una barra homogénea y elástica es igual a:

$$(2.37) \quad v_p = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Que como se verá en el capítulo 2.3, que esta misma expresión se utiliza para la determinación del módulo elástico dinámico, ya que relaciona la velocidad de onda (que depende directamente de la frecuencia) con el módulo de elasticidad del material.

El origen de la expresión (2.37) así como su demostración el lector la puede encontrar en [39]. Así como más teoría sobre la transmisión de ondas en distintos tipos de medios, enfocada en suelos y cimentaciones.



**Figura 2.6.** Esquema de la propagación de las Ondas-P.

### 2.2.3 Onda S

Asociada a la palabra “Shear” del inglés corte, debido a que estas ondas tienen un movimiento de cizalla. Esta onda es más lenta que la onda P, por esto mismo, también es llamada onda secundaria.

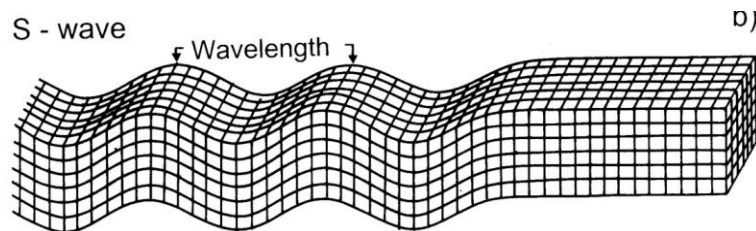
Su transmisión implica una deformación transversal del material de transmisión, por lo que esta onda solo se presenta en sólidos, ya que los líquidos no tienen resistencia al corte. En casos sísmicos estas por ejemplo no pueden ser transmitidas al océano.

El tipo de movimiento asociado a la onda S, provoca sacudidas de la superficie del material, o en el caso de un sismo (que se manifiesta por la transmisión de distintos tipos de ondas provocadas por un desplazamiento de placas tectónicas), son las responsables de los movimientos trepidatorios.

Su velocidad puede ser determinada por la expresión:

$$(2.38) \quad v_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

Al igual que (2.37), su demostración puede ser encontrada en el capítulo 3.2 de [39].



**Figura 2.7.** Propagación de Ondas-S.

### 2.2.4 Ondas Superficiales

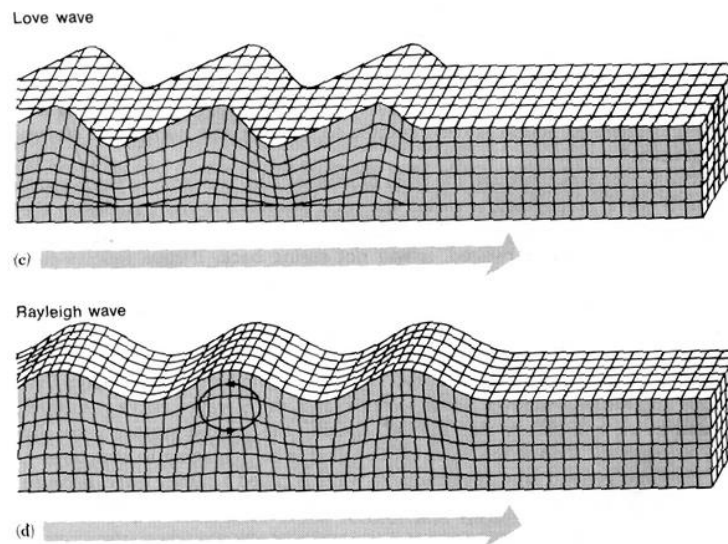
Llamadas así pues el movimiento que requiere el sólido para la transmisión de estas ondas, es en su superficie. Este tipo de ondas son las ondas más lentas, teniendo la propiedad de refracción cuando se producen en un medio heterogéneo formado por capas, como lo pueden ser los suelos. Se subdividen en dos tipos.

### Onda Love – Ondas L

Similares a las ondas S, pero sin desplazamientos verticales, por lo que se mueven en la superficie del sólido pero de forma lateral en el plano superficial. En un sismo este tipo de ondas producen sacudidas en la base de las estructuras.

### Ondas Rayleigh – Ondas R

Su movimiento superficial se asemeja al movimiento de las olas del mar, pues provoca que las partículas superficiales tengan movimientos verticales y horizontales simultáneamente, por lo que en un plano vertical forman un movimiento elíptico.



**Figura 2.8.** Ondas Superficiales (Love y Rayleigh).

## 2.3. Módulo Elástico Dinámico

El módulo de elasticidad dinámico es aquél que se basa u obtiene debido a las vibraciones y las propagaciones de onda. El principio funciona como un análisis modal, pero en forma inversa, teniendo una frecuencia de vibración de un elemento, llegar a las propiedades mecánicas en función de estas.

La vibración longitudinal libre de barras se describe en la siguiente expresión [21]:

$$(2.39) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v_b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Donde:

$u$	= Desplazamiento en la dirección “x”
$t$	= Variable de tiempo
$x$	= Coordenada longitudinal
$v_b$	= $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$
$E$	= Módulo elasticidad de Young
$\rho$	= Densidad

La velocidad de la onda puede ser expresada en términos de la frecuencia de resonancia o fundamental y longitudes de onda mediante (2.40)

$$(2.40) \quad v_b = f_n \lambda_n$$

En donde

$f_n$	= La frecuencia del $n$ ésimo modo natural
$\lambda_n$	= Longitud de onda asociada con la frecuencia natural $n$ ésima.
$n$	= Número de modo.

Las longitudes de onda pueden ser expresados en términos de la longitud de la barra como:

- para condiciones de extremo, doblemente libre o doblemente restringido

$$(2.41) \quad \lambda_n = \frac{2L}{n} \quad n = 1,2,3 \dots,$$

- Para condiciones de extremo, restringido-libre

$$(2.42) \quad \lambda_n = \frac{4L}{n} \quad n = 1,3,5 \dots,$$

Donde

$L$	= Longitud de la barra
-----	------------------------

Por tanto el módulo dinámico puede ser calculado mediante:

$$(2.43) \quad E = \rho v_b^2$$



La velocidad de onda en la barra,  $v_b$ , se determina midiendo la frecuencia de resonancia de varios modos y substituyendo en la ecuación (2.40) con su longitud de onda asociada según el tipo de condición de apoyo que más se asemeje a la condición real de la barra.

Por otro lado la ecuación para vibración lateral del tipo Euler (es decir ignorando los efectos cortantes y rotacionales) se dan en la siguiente expresión.

$$c^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

Donde

$$c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

A = Área de la sección transversal  
I = Momento de inercia del elemento con respecto a su centroide.

Pudiendo demostrarse que las frecuencias fundamentales del elemento son [21]:

$$(2.44) \quad f_n = \frac{(B_n L)^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}}$$

Despejando de la expresión (2.44) el término de la elasticidad, E, se determina el módulo dinámico de elasticidad como sigue:

$$(2.45) \quad E = \frac{4\pi^2 f_n^2 \rho A L^4}{(B_n L)^4 I}$$

Algunos valores de  $\beta_n L$  para algunas de las condiciones de apoyo más comunes para vibración lateral de elementos de barra.

Tipo de soporte	$\beta_1 L$	$\beta_2 L$
Simplemente apoyado o libre en ambos extremos	4.730041	7.853205
Simplemente apoyado en un extremo	1.875104	4.694091

**Tabla 2.5.** Valores de  $\beta_n L$  para las condiciones más comunes de apoyo.

Las demostraciones a estas formulaciones el lector las podrá encontrar en el capítulo 3 de [39] y en el capítulo 8.5 de [40]

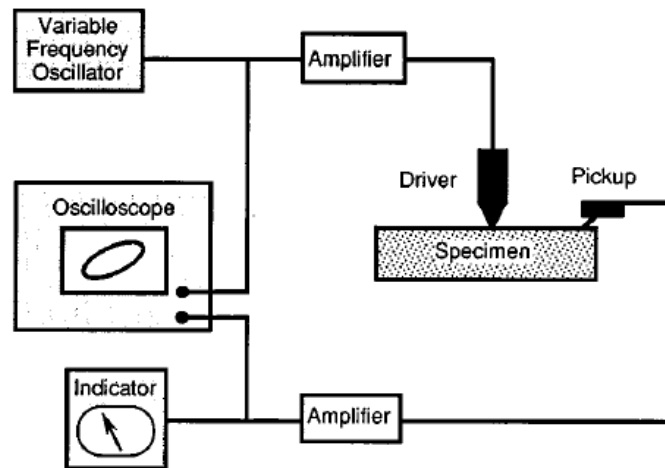
### 2.3.2 Normativa Existente

Los métodos para la medición de la frecuencia fundamental de resonancia transversal, longitudinal y torsional con la finalidad de calcular el módulo elástico dinámico del concreto, no se encuentran tan ampliamente difundidos ni estandarizados como para las pruebas para la obtención del módulo elástico estático descritos en 2.1.3.

#### 2.3.2.1 ASTM C 215-97 [10]

Propone dos métodos para determinar las frecuencias fundamentales de resonancia: (1) El método de la resonancia forzada, o (2) El método de la resonancia por impacto. Habiendo libertad de elegir entre cualquiera de los dos, con la restricción de utilizar el mismo método de prueba para todos los especímenes de una determinada serie.

El método de la resonancia forzada, el espécimen apoyado adecuadamente es forzado a vibrar por un dispositivo electro-mecánico, mientras se monitorea la respuesta del espécimen mediante un sensor ligero colocado sobre el espécimen. La frecuencia a la que se fuerza vibrar al sólido varía hasta que las respuestas obtenidas alcanzan un máximo en amplitud. El valor de la frecuencia causante de la respuesta máxima es la frecuencia de resonancia del espécimen. Las frecuencias fundamentales de los tres diferentes modos de vibrar son obtenidas mediante la adecuada colocación del dispositivo vibrador como del sensor.



**Figura 2.9.** Esquema de la prueba mediante resonancia forzada. [10]

En el método de la resonancia por impacto, el espécimen apoyado adecuadamente es golpeado con un pequeño martillo y la respuesta del espécimen es medida mediante un acelerómetro ligero colocado sobre el espécimen. Los resultados del acelerómetro son registrados. La frecuencia fundamental de vibración se determina mediante el procesamiento digital de la señal, o mediante

un contador de cruces con el cero en la onda registrada. La frecuencia fundamental para los tres distintos modos de vibrar, al igual que con el método descrito en el párrafo anterior, se obtienen mediante la colocación adecuada del punto de impacto y el acelerómetro.

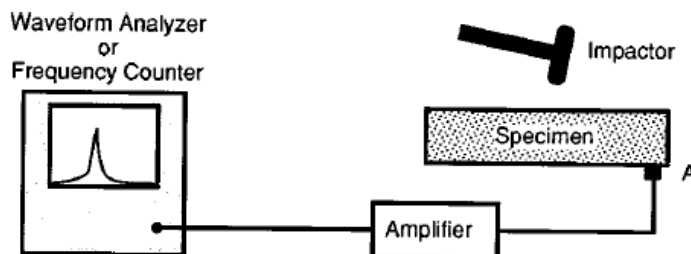


Figura 2.10. Esquema de la prueba por resonancia por impacto. [10]

La norma hace la notación que el módulo de elasticidad dinámico obtenido por estos métodos es en general mayor al módulo elástico estático que se obtiene siguiendo el método de prueba especificado en la norma C 469 [2]. El grado de discrepancia, depende en parte de la resistencia del concreto.

Así mismo se menciona que las frecuencias de resonancia obtenidas de especímenes con distintas formas y tamaños del mismo concreto pueden llegar a diferir ampliamente. Por tanto cualquier comparación de resultados entre especímenes de distintas formas y tamaños debe hacerse con precaución.

### Cálculos

El cálculo del módulo de elasticidad dinámico de Young, en Pascales ( $N/m^2$ ) a partir de la frecuencia fundamental **transversal**, la masa y las dimensiones del espécimen se realiza acorde a la siguiente expresión:

$$(2.46) \quad E_D = CMn^2$$

Donde

- M = Masa del espécimen, kg
- n = Frecuencia fundamental transversal, Hz
- C =  $1.6067 (L^3T/d^4)$ ,  $N s^2 (kg m^2)$  para un cilindro  
=  $0.9464 (L^3T/bt^3)$ ,  $N s^2 (kg m^2)$  para un prisma
- L = Longitud del espécimen, m
- d = Diámetro del cilindro
- t,b = Dimensiones del área transversal del prisma, “t” siendo la dimensión en la dirección del impulso.
- T = Factor de corrección que depende de la tasa del radio de giro, K, contra la longitud del espécimen, L, y del coeficiente de Poisson. Valores de T para

valores del coeficiente de Poisson de 1/6 se pueden ver en la Tabla 2.6 más adelante. (Llamada así en honor a Stephen Timoshenko quien desarrollo la teoría para vigas con su mismo nombre)

Para el cálculo del módulo de elasticidad dinámico de Young, mediante la frecuencia fundamental **longitudinal**, la masa y las dimensiones del espécimen, se hace uso de la expresión siguiente:

$$(2.47) \quad E_d = D M (n')^2$$

Donde

- n' = Frecuencia fundamental longitudinal, Hz
- D = 5.093 (L/d<sup>2</sup>), N s<sup>2</sup> (kg m<sup>2</sup>) para un cilindro
- = 4 (L/bt), N s<sup>2</sup> (kg m<sup>2</sup>) para un prisma.

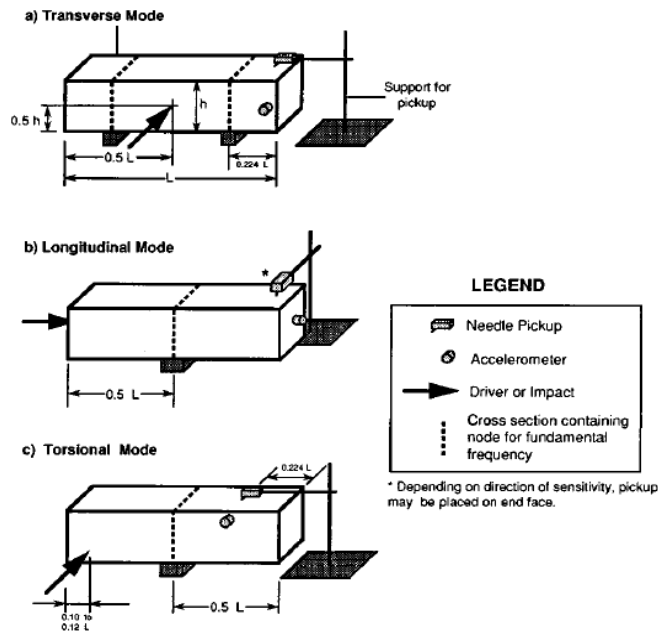


Figura 2.11. Ubicación de dispositivos de impulso (vibración o impacto) y del sensor. [10]

K/L	Valores de T*			
	$\mu = 1/6$	$\mu = 0.2$	$\mu = 0.23$	$\mu = 0.26$
0.00	1.00	1.00	1.00	1.00
0.01	1.01	1.01	1.01	1.01
0.02	1.03	1.03	1.03	1.03
0.03	1.07	1.07	1.07	1.07
0.04	1.13	1.13	1.13	1.14
0.05	1.20	1.2	1.21	1.21
0.06	1.28	1.28	1.29	1.29
0.07	1.38	1.38	1.39	1.39
0.08	1.48	1.49	1.49	1.5
0.09	1.60	1.61	1.61	1.62
0.10	1.73	1.74	1.75	1.76
0.12	2.03	2.04	2.05	2.07
0.14	2.36	2.38	2.39	2.41
0.16	2.73	2.75	2.77	2.8
0.18	3.14	3.17	3.19	3.22
0.20	3.58	3.61	3.65	3.69
0.25	4.78	4.84	4.89	4.96
0.30	6.07	6.15	6.24	6.34

**Tabla 2.6.** Valores de Corrección “T”.

$$(2.48) \quad T' = T \left[ \frac{1 + (0.26\mu + 3.22\mu^2)K/L}{1 + 0.1328 K/L} \right]$$

Donde  $T$  es el valor para  $\mu=1/6$  mostrado en la segunda columna de la Tabla 2.6

## 2.4. Análisis de Señales

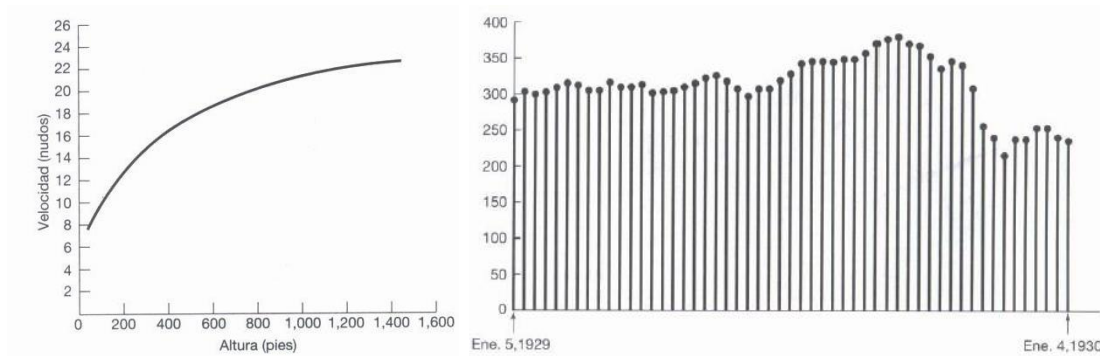
La sección 0 y 2.3 hablan de la medición de ondas de propagación que resultan de una frecuencia, lo que implica un procesamiento de señales, puesto que las mediciones a realizar resultarán en forma de onda, siendo importante conocer las propiedades de las ondas, su comportamiento y la transformación de estas del dominio del tiempo al dominio de las frecuencias, proceso descrito en la Figura 2.10

### 2.4.1 Propiedades [41]

Las señales describen una amplia variedad de fenómenos físicos, pudiéndose representar de muchas formas, siempre la información en una señal está contenida en un patrón de variaciones que presenta alguna forma determinada.

Matemáticamente se representan como funciones de una o más variables independientes. Por ejemplo, la señal de una voz puede ser representada matemáticamente pero la presión acústica como una función del tiempo, y una imagen por la brillantez como una función de dos variables espaciales. O como para el caso de las vibraciones, el registro de aceleraciones que experimenta un espécimen en función del tiempo.

Se consideran dos tipos básicos de señales: continuas y discretas. En las señales continuas, la variable independiente es continua, por lo que estas señales se definen para una sucesión continua de valores de la variable independiente. Mientras que las señales discretas solo están definidas en tiempo discreto y por consiguiente la variable independiente solo toma un conjunto discreto de valores.



**Figura 2.12.** Ejemplo de los tipos básicos de señales. La de la izquierda una señal continua, la imagen de derecha una señal discreta. [41]

Una señal discreta puede representar un fenómeno para el cual la variable es intrínsecamente discreta. Señales como datos demográficos son un ejemplo. Por otro lado, una clase muy importante de señales discretas surge del muestreo de señales continuas. Siendo en este caso, la señal discreta  $x(n)$  representa muestras sucesivas de un fenómeno subyacente para el cual la variable independiente es continua.

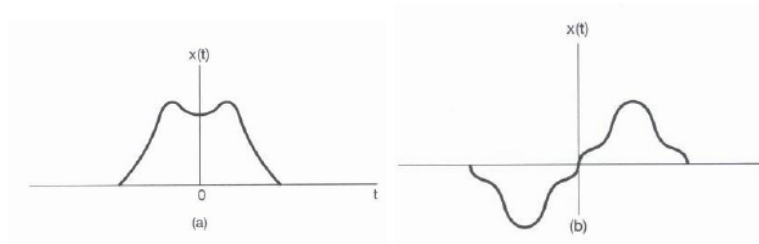
#### 2.4.1.2 Señales Par e Impar

Un conjunto de propiedades útiles de las señales se relaciona con la simetría que presentan con la inversión de tiempo. Una señal  $x(t)$  o  $x[n]$  es una señal par si es idéntica a su contraparte invertida en el tiempo (con su reflejo respecto del origen). Como expresa la siguiente expresión:

$$(2.49) \quad x(-t) = x(t) \quad x[-n] = x[n]$$

Una señal impar debe ser necesariamente 0 en  $t=0$  o  $n=0$ , pues a una señal se le considera impar si cumple con las expresiones de (2.50) .

$$(2.50) \quad x(-t) = -x(t) \quad x[-n] = -x[n]$$



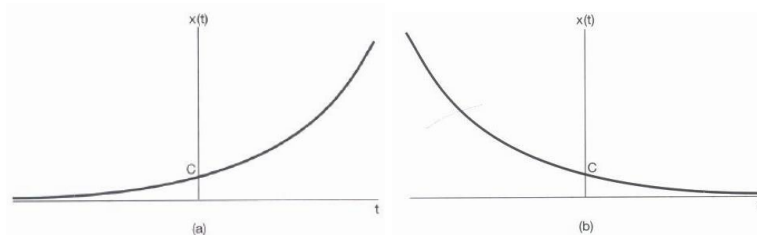
**Figura 2.13.** Ejemplos de funciones continuas, par (a) e impar (b). [41]

### 2.4.1.3 Señales continuas exponenciales y senoidales

La señal continua exponencial compleja es de la forma

$$(2.51) \quad x(t) = Ce^{at}$$

Donde  $C$  y  $a$  son números complejos. Dependiendo de estos valores, la exponencial compleja puede adoptar características diferentes. Para el caso que se ilustra en la Figura 2.14, donde ambos parámetros ( $C$  y  $a$ ) son positivos, la función es una exponencial real, teniendo dos formas de comportamiento, decreciente o creciente, en función de si el parámetro  $a$  es negativo o positivo. Para el caso particular de  $a=0$  se tiene una función constante.



**Figura 2.14.** Exponencial real continua  $x(t)$ . (a)  $a>0$ , b)  $a<0$

Al tener una función puramente exponencial, en donde  $a$  es un valor complejo con parte imaginaria. Dicha señal exponencial periódica, está íntimamente relacionada con una señal senoidal (Ecuación (2.52) ), demostrable mediante la relación de Euler.

$$(2.52) \quad x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

Es común escribir  $\omega_0 = 2\pi f_0$  donde  $f_0$  tiene unidades de ciclos por segundo (Hz). Ambas funciones, exponencial compleja y senoidal son periódicas y con periodo fundamental  $T_0$ , que se relaciona con  $\omega_0$  con la expresión (2.30) .

Usando la relación de Euler, la función exponencial compleja se puede escribir en términos de señales senoidales con el mismo periodo fundamental.

$$(2.53) \quad e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t$$

De forma inversa una señal senoidal puede escribirse en términos exponenciales complejas periódicas, con el mismo periodo.

$$(2.54) \quad A \cos(\omega_0 t + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 t}$$

### 2.4.2 Dominio de las Frecuencias

Las señales que se han tratado hasta ahora se encuentran en el dominio del tiempo, siendo este la variable independiente. En este apartado se presentará una introducción del traspaso del dominio del tiempo al dominio de las frecuencias utilizando la Transformada de Fourier. Pues es en este dominio el que se requiere para la identificación de las frecuencias fundamentales de resonancia desde un registro de vibraciones/aceleraciones el cual se encuentra en función del tiempo.

La idea subyacente en el proceso de transformación de un dominio al otro, es la descomposición de una señal compleja en la sumatoria de señales más simples. El oído humano, por medio del caracol, descompone las señales auditivas en sus frecuencias fundamentales. Para mejor entendimiento del concepto se muestran las siguientes tres figuras siguientes tomadas de [42]

La Figura 2.15 muestra como una señal compleja ( $4 \sin x + \sin 3x$ ) representada en la parte inferior, puede descomponerse en dos señales más simples, expuestas en la parte superior de la figura. O visto de forma inversa, la señal compleja es el resultado de la suma de dos funciones senoidales de la parte superior.

En este ejemplo se pueden reconocer a simple vista las frecuencias y amplitudes que resultan en la señal compleja. Pero complicando la señal más como la de la Figura 2.16, es difícil determinar la descomposición en senos o cosenos de la función final.

En la Figura 2.17 se muestra una señal periódica que se puede descomponer en 5 señales senoidales, de distintas frecuencias y amplitudes. Cuando se analiza una señal de voz en frecuencias, por ejemplo, la información relevante son las frecuencias de señales con mayor amplitud, pues tienen mayor participación en la determinación de la señal.



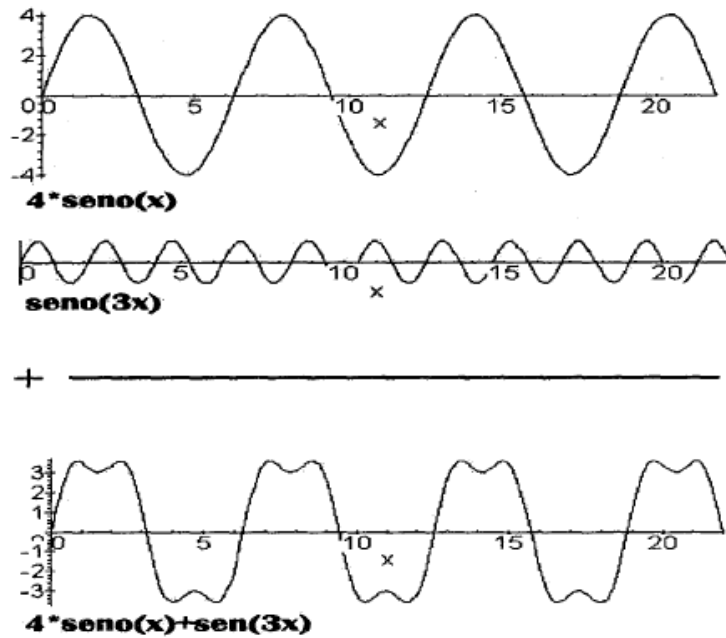


Figura 2.15. Ejemplo de descomposición de una señal compleja en sumatorio de señales simples [42]

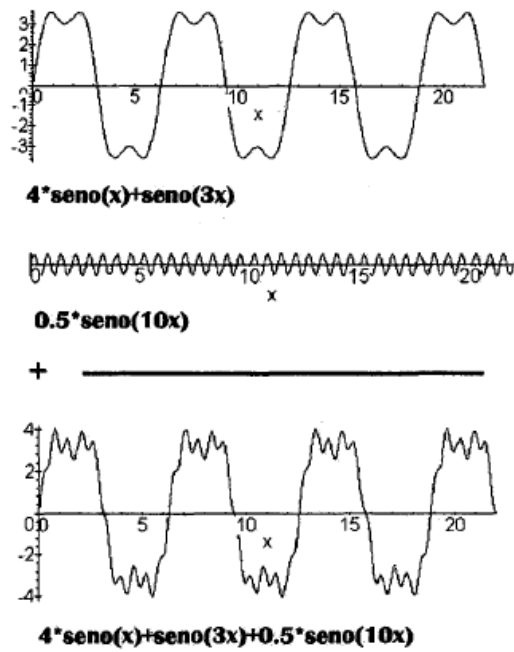
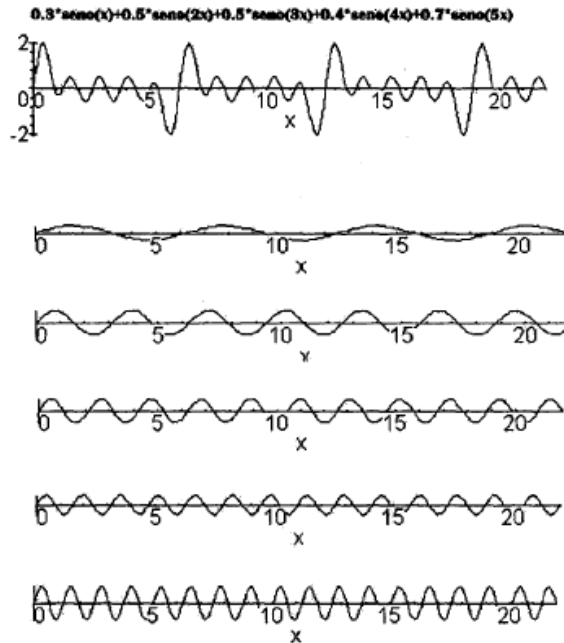


Figura 2.16. Ejemplo de descomposición de una señal compleja en sumatorio de señales más simples. [42]



**Figura 2.17.** Tercer ejemplo de descomposición de una señal compleja en la suma de señales más simples. [42]

#### 2.4.2.2 Transformada de Fourier

Se tratará directamente la Transformada de Fourier desde su formulación para señales discretas, que son las que se requieren para el análisis de señales muestreadas, a las que está enfocado este trabajo. La expresión que define a la Transformada es:

$$(2.55) \quad F\left(\frac{n}{NT}\right) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} m(kT) e^{-j\frac{\pi nk}{N}} \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Donde

- N = Número de muestras del rango del muestreo a analizar
- T = Es el periodo de muestreo
- n = Índice de la frecuencia cuyo valor se desea obtener
- m(kT) = muestra tomada en el instante kt
- kT = muestra K-ésima, del rango analizado.

El valor “n” determina la frecuencia en específico que se va a analizar, representando una de las frecuencias en las que se tratará de descomponer la señal de partida. Debido a estas expresiones, se concluye lo siguiente:

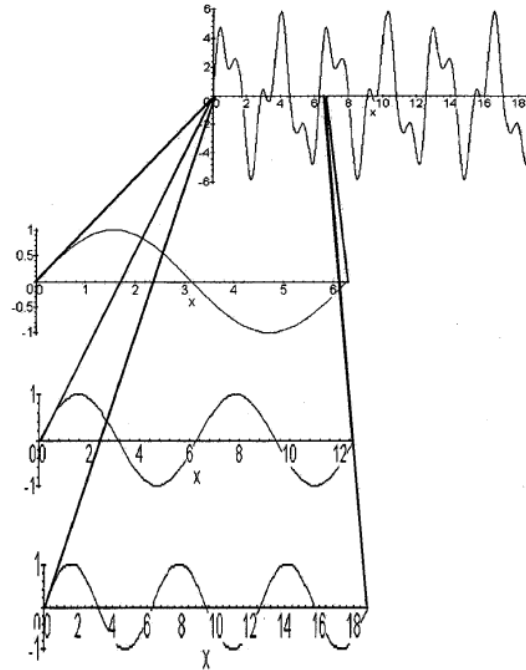
- La porción de señal analizada, se encuentra en el bloque de muestras de  $m(0)$  a  $m(N-1)$ , debido a la sumatoria intrínseca en la formulación (2.55)
- La frecuencia  $f=0$  Hz, que corresponde a  $n=0$ , se simplifica a la media aritmética de los valores de las muestras, siendo de esta manera la componente constante de la señal.
- Los valores obtenidos para  $0 \leq n \leq N/2$  coinciden con los obtenidos en el intervalo  $N/2 \leq n \leq N-1$ , con “n” par. Por lo que es suficiente realizar los cálculos de una de las dos mitades, según el criterio de Nyquist, ancho de banda de la señal coincide con la mitad de la frecuencia de muestreo  $f_0$  correspondiente a  $n=0,1,2,\dots,(N/2)-1$
- Los valores  $n=1$  corresponde a  $2\pi$ ,  $n=2$  a  $4\pi\dots$   $n=N-1$  a  $2(N-1)\pi$ . Indicando las frecuencias de las señales senoidales, con las que se comparará la señal original.
- Al aumentar el valor de “N” se consigue obtener un análisis con mayor número de frecuencias, pero requiriendo mayor tiempo para el cálculo de las operaciones del sumatorio  $0 \leq k \leq N-1$

Como se mencionó con anterioridad en la expresión (2.53), las señales exponenciales periódicas pueden expresarse en función de funciones senoidales. Por tanto la transformada de Fourier descrita en (2.55), puede escribirse también como:

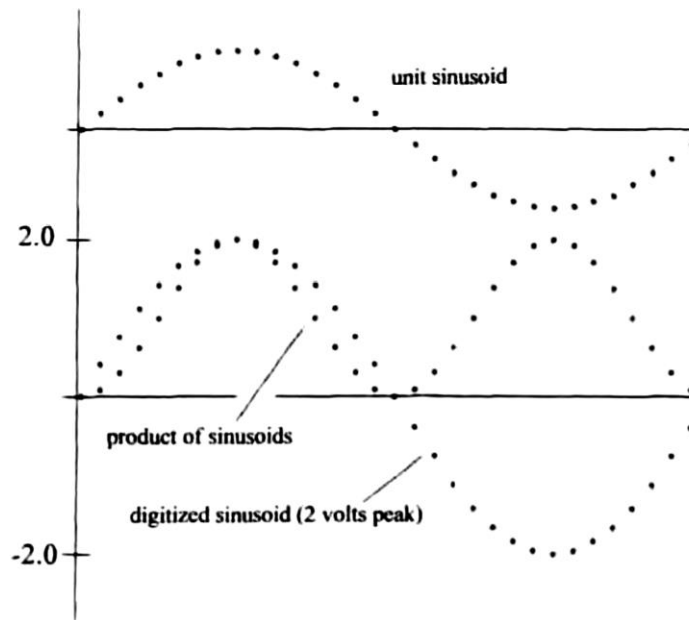
$$(2.56) \quad F\left(\frac{n}{NT}\right) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} m(kT) * \left( \cos\left(-2\pi n \frac{k}{N}\right) + j * \sin\left(-2\pi n \frac{k}{N}\right) \right)$$

Por lo que en cada ciclo de variación de  $k$ , se hace una comparación indirecta con las funciones senoidales, seno y coseno, de la frecuencia analizada. Esto se puede apreciar en la Figura 2.18, donde se tiene una función compleja, de la cual se compara un bloque de función de tamaño “N”, contra tres senos de distintas frecuencias  $2\pi$  ( $n=1$ ),  $4\pi$  ( $n=2$ ),  $6\pi$  ( $n=3$ ). Pudiendo observar que la función que mejor encaja en este intervalo es la correspondiente al seno con frecuencia de  $4\pi$ .

Sucede que al multiplicar el valor de la función por las funciones de seno o coseno, de ser ambas de signos iguales, resulta en un valor positivo, y de ser signos opuestos, resulta en un valor negativo, por tanto la sumatoria termina por potencializar aquellas funciones que son más parecidas en forma a la función, y a minimizar por la anulación de positivos con negativos de las funciones que menos concuerdan. En la Figura 2.19 se ilustra este fenómeno.



**Figura 2.18.** Comparativa de funciones seno de distintas frecuencias con un bloque de una señal que se pretende descomponer. [42]



**Figura 2.19.** Mecánica del Análisis de Fourier. [43]

### 2.4.2.3 Transformada Rápida de Fourier

En la sección anterior se describió conceptualmente el funcionamiento de la transformada de Fourier, sin embargo, este proceso requiere mucha capacidad de cómputo y tiempo, puesto que realiza un barrido de todo un espectro de frecuencias que tratándose de 5kHz, son 2,500 sumatorias, en cada una de las cuales se requiere realizar 5,000 multiplicaciones. Por lo que la Transformada de Fourier, pese a ser una herramienta sumamente poderosa en el procesamiento de señales digitales, el tiempo que requiere para realizarse, no lo hace una opción práctica.

El mismo problema que las calculadoras y computadoras tenían para aproximar el valor de funciones trigonométricas como  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$ ,  $\tan(x)$ ,  $\exp(x)$  utilizando series de Taylor, proceso que de igual forma requería mucho procesamiento y tiempo.

Sin embargo se puede observar que de forma práctica las distintas series eran de la forma polinómica siguiente:

$$(2.57) \quad F(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \dots$$

Pudiendo expresarla de la siguiente forma.

$$(2.58) \quad F(x) = A_0 + x(A_1 + x(A_2 + x(A_3 + x(A_4 + \dots (xA_n))))))$$

Factorizando repetidamente la variable “x” de cada una de las series. Con esto logrando reducir el número de multiplicaciones requeridas de  $(N^2+N)/2$  a solo N. A esta solución se le conoce como esquema de Homer. Quizá cuando se trate de rangos de N pequeños, no presenta una gran ventaja en la solución dicho método, pero cuando se trata de más de 30, se vuelve evidente.

La transformada rápida de Fourier, o FFT<sup>7</sup> por sus siglas en inglés, desafortunadamente a pesar que su funcionamiento es análogo al esquema de Homer, reduciendo sustancialmente el número de operaciones matemáticas requeridas para realizar la transformada de Fourier, la demostración y explicación de su funcionamiento y algoritmo no es tan sencillo. Siendo no el objetivo de este trabajo por lo que se exhorta al lector si desea profundizar en el tema, consultar [43].

---

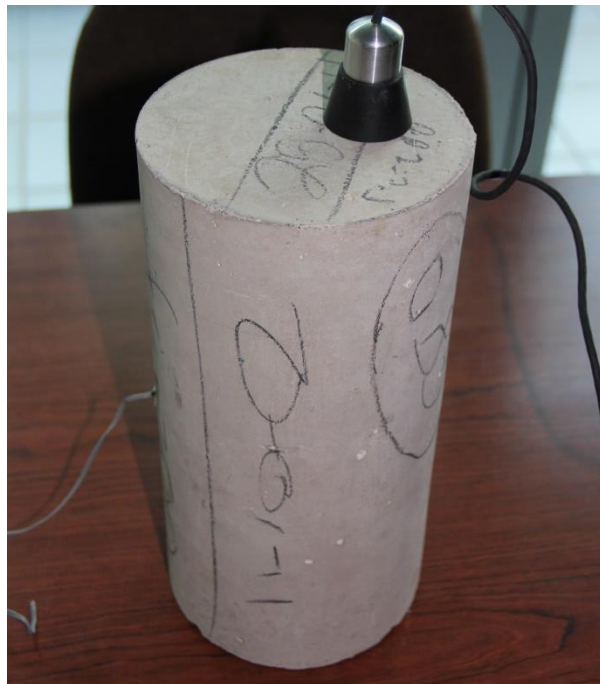
<sup>7</sup> Fast Fourier Transform

### 3. MEDICIÓN

En esta sección se describirá los procesos a seguir en la realización de las pruebas sobre los especímenes, los cuales están basados principalmente en las normativa existente descritas en las secciones 2.1.3 y 2.3.2.1 para la obtención de las frecuencias fundamentales de vibración y la curva esfuerzo-deformación de los cilindros de concreto.

#### 3.1. Especímenes

En total se probaron 33 cilindros de concreto según lo que establece las normas para la determinación del módulo estático dinámico [10] y estático [2], que se referencian a la norma [30] en su sección 5.1 “*Cylindrical Specimens*” el cual establece que los especímenes cilíndricos deberán tener una relación  $L/D = 2$ , siendo “*L*” la longitud del espécimen y “*D*” el diámetro. La norma considera como cilindro estándar aquél de 6’ de diámetro y 12’ de longitud. (150 x 300 mm), estas condiciones siempre y cuando no se contengan agregados mayores a 2 pulgadas (50 mm), situación que cumplían todos los especímenes probados. Un ejemplo de un cilindro se aprecia en la Figura 3.1



**Figura 3.1.** Uno de los especímenes ensayados. Se aprecia su forma cilíndrica y una relación altura-diámetro igual a dos.

No se tuvo un control por parte del equipo de investigación, sobre el origen de los agregados, el proceso de cimbra, vibrado o colado del concreto fresco, que conforman los cilindros. Tampoco se

llevó registro del tiempo de curado, o los días que transcurrieron después del colado de los cilindros. Pero todos los cilindros se dejaron reposar durante al menos 28 días de haberlo obtenido el grupo de investigación. Garantizando de este modo el tiempo mínimo para que los concretos hayan alcanzado su resistencia de diseño.

Mas todos los cilindros fueron elaborados en la ZMG<sup>8</sup>, por lo que se supone contienen un mismo tipo de agregados disponibles en la región.

Todos los cilindros fueron pesados y medidos antes de cada prueba, la báscula utilizada para pesar los especímenes se observan en la Figura 3.2.



**Figura 3.2.** Báscula utilizada para la medición del peso de los cilindros ensayados.

---

<sup>8</sup> Zona Metropolitana de Guadalajara, Jalisco. México.

En la Tabla 3.1 se muestran los 33 cilindros ensayados, con sus diámetros alturas y pesos. Se incluye en la tabla la nomenclatura que se le dio a cada uno de los cilindros ensayados en la columna bajo el encabezado “CILINDRO”. Los resultados se expresan en centímetros y gramos, según es el caso.

#	CILINDRO	Diametro (cm)	Altura (cm)	Peso (grs)
1	c14_1174	15.00	30.00	11,740
2	c15_1182	15.00	30.00	11,820
3	c16_1049	15.00	30.00	10,490
4	c17_1039	15.00	30.00	10,390
5	c19_1060	15.00	30.00	10,600
6	c20_1073	15.00	30.00	10,730
7	c22_1035	15.00	30.00	10,350
8	c23_1024	15.00	30.00	10,240
9	c24_1038	15.00	30.00	10,380
10	c25_884	15.00	30.00	8,840
11	c26_934	15.00	30.00	9,340
12	c27_940	15.00	30.00	9,400
13	c28_887	15.00	30.00	8,870
14	c29_1252	15.00	30.00	12,520
15	cilindro1	15.00	30.00	12,090
16	cilindro2	15.02	30.00	11,630
17	cilindro3	14.90	29.90	11,630
18	cilindro4	15.00	30.00	12,100
19	cilindro5	14.90	29.90	11,950
20	cilindro8	15.00	30.00	12,030
21	cilindro10	15.00	30.00	11,910
22	cilindro11	15.00	30.00	11,910
23	cilindro12fc150	15.10	30.00	10,570
24	cilindro21	15.00	30.00	10,350
25	C2_11982	14.90	30.00	11,982
26	C7_12323	15.10	30.10	12,323
27	C8_12234	15.10	30.10	12,323
28	C1_N3A4	14.90	29.90	12,027
29	C4_N1TT	15.00	29.90	12,187
30	C5_N5A4	14.90	29.90	11,781
31	C6_N5TT	15.00	30.00	12,074
32	C9_N4TT	15.00	30.00	12,071
33	C10_N3TT	14.90	30.00	12,104

**Tabla 3.1.** Cilindros ensayados con su nomenclatura, altura, diámetro y peso.



## 3.2. Prueba Dinámica

El procedimiento que se siguió para la prueba dinámica del módulo de Young, cuyo objetivo es la obtención de la frecuencia fundamental de vibración de los cilindros de concreto, fue muy similar a la detallada en la norma ASTM C 215 [10], descrita brevemente en la sección 2.3.2.1. Las diferencias se detallan en seguida.

### 3.2.1 Herramientas e Instrumentos de medición.

En la realización de los ensayos intervinieron las herramientas descritas a continuación. Estas difieren de lo recomendado por [10].

#### Martillo

Las ondas de vibración pueden ser generadas por cualquier mecanismo capaz de producir una fuerza que varíe rápidamente con el tiempo, como puede ser un transductor piezoeléctrico o a través de la colisión de dos cuerpos sólidos. Para la realización de las pruebas que se tratan en esta tesis se utiliza este último método para excitar el cilindro de concreto, usando un pequeño martillo con una cabeza esférica de acero.

Entre los parámetros más importantes que caracterizan el impacto son la duración o el tiempo de contacto, el diámetro de la esfera y la energía cinética de la esfera al momento del impacto. La relación entre estos parámetros se detalla por Hertz en la teoría del impacto elástico.

Las características de las ondas generadas por el impacto elástico de la esfera en un sólido, en este caso el cilindro de concreto, determinan la capacidad para propagarse a través del material y su utilidad para encontrar las propiedades del mismo. La dependencia del tiempo de contacto en relación a la fuerza del impacto es débil y puede ser despreciada, pudiendo considerarse la siguiente relación lineal.

$$(3.1) \quad t_c = 0.0043 D$$

Donde  $t_c$  se refiere al tiempo de contacto y “ $D$ ” al diámetro de la esfera.

Las ondas generadas por el impacto están compuestas por un gran rango en la distribución de frecuencias, esta distribución se determina por la función fuerza-tiempo del impacto. La distribución de frecuencias se obtiene calculando una transformada de Fourier de la función fuerza-tiempo del impacto. Los datos experimentales han demostrado que las amplitudes de las ondas de vibración son suficientes para la evaluación de las frecuencias debajo de  $1.25/t_c$ .

Si se define como  $f_{max}=1.25/t_c$  como la frecuencia máxima de la energía útil del impacto, y se combina con la ecuación (3.1), el resultado es aproximadamente la de la siguiente relación:

$$(3.2) \quad f_{max} = \frac{291}{D}$$

Donde  $f_{max}$  se encuentra en Hz y “D” en metros. Así pues por ejemplo una esfera con diámetro de 3 mm, producirá frecuencias útiles hasta por los 97 kHz. Mientras que una esfera de 20 mm produce frecuencias hasta de 15 kHz.

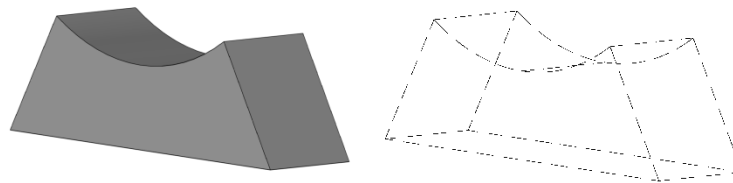
Por tanto el impacto de una esfera pequeña tiene un corto tiempo de contacto pero produce ondas de vibración en un rango más amplio de frecuencias, sin embargo la amplitud de las mismas es más baja y pudiendo ser confundibles las vibraciones fundamentales con discontinuidades en el material.

El golpe no requiere ser muy fuerte ni tener una fuerza en específico. La velocidad de transmisión de onda longitudinal, como se observa en la expresión (2.37), no depende de la fuerza del impulso, solo de las propiedades del material.

### Bases de Apoyo

Elementos sobre los que se apoyará el cilindro de concreto a ensayar. La finalidad de que sea de este material, es restringir lo menos posible el cilindro con un material que absorba las vibraciones en lugar de rebotarlas, pues el rebote de las vibraciones dentro del cilindro, puede provocar vibraciones que interfieran en la señal obtenida por el receptor. Además aislando al cilindro de vibraciones externas del lugar donde se apoye (suelo, escritorio, etc). El material del cual están formadas las bases utilizadas en esta investigación es a base de caucho de silicón.

En conclusión las bases además de soportar el cilindro permiten una medición más limpia y clara. En la Figura 3.3 se puede ver un esquema de la forma de las bases de utilizadas



**Figura 3.3.** Bases de caucho de silicón para el soporte del cilindro de concreto.

### Hidrófono

A diferencia del método descrito en 2.3.2.1, no se utilizará un acelerómetro que permita medir las aceleraciones en el cilindro, en su lugar se usará un Hidrófono que registre las ondas vibratorias en el cilindro, producto del golpe del martillo. Dichas ondas se transmiten al hidrófono por contacto, lo cual permite registrar la vibración producto tanto por ondas de compresión como de corte.

Las frecuencia de la vibración del cilindro se encuentra dentro del espectro audible, por lo que se podría registrar por un micrófono simple, sin embargo este no sería capaz de medir las ondas de corte, sino solamente las ondas de compresión longitudinales, debido a que las ondas de corte no pueden ser transmitidas por fluidos (agua, aire) debido a su nula resistencia al corte.



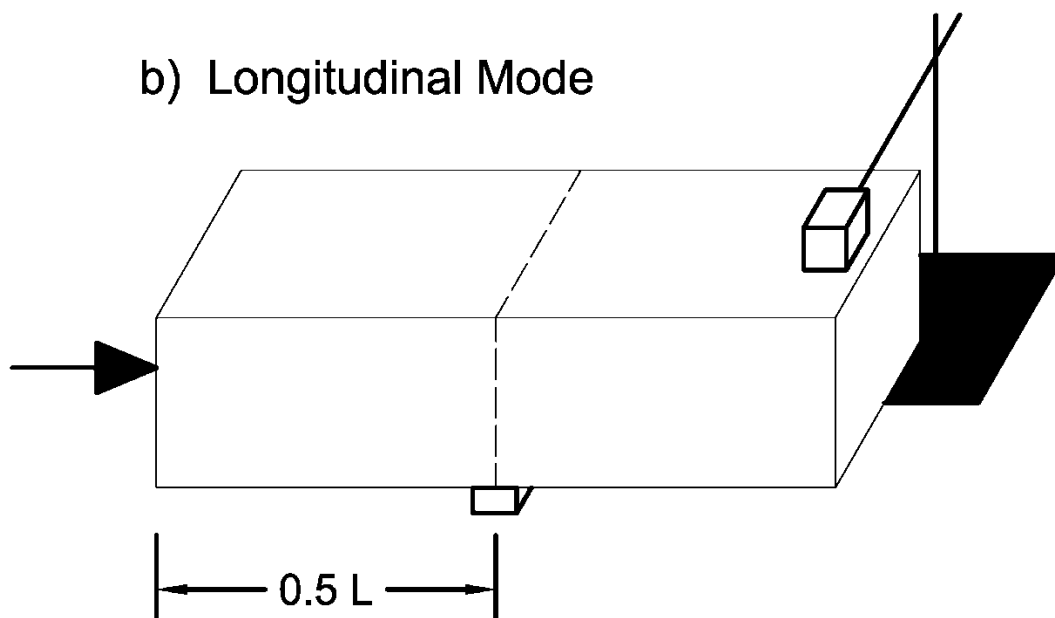
**Figura 3.4.** Hidrófono utilizado en la realización de la prueba. En la imagen se encuentra colocado sobre uno de los cilindros ensayados.

El hidrófono se conecta directamente a cualquier computador que tenga la entrada adecuada compatible con el mismo. El computador a utilizar varío, a lo largo de los ensayos, sin embargo la máquina encargada del procesamiento no tiene afectación en ninguno de los resultados a obtener.

### 3.2.2 Metodología de medición.

Como se mencionó con anterioridad, la metodología está basada en la norma C215 de la ASTM, sin embargo haciendo algunas variaciones. El proceso completo de medición se detallará enseguida, señalizando los puntos donde existan inconsistencias con la norma.

Los cilindros ya medidos y pesados conforme el capítulo 3.1. Se colocarán sobre la base de caucho de silicón, de forma que el cilindro se encuentre centrado y uniformemente apoyado en toda la superficie del soporte, sin que el cilindro se incline hacia alguno de los lados. Un esquema de la forma de apoyo tomada de la norma C 215 se muestra en la Figura 3.5:



**Figura 3.5.** Modo de apoyo requerido para la medición de la frecuencia fundamental longitudinal. Se muestra también la ubicación de los sensores según [10].

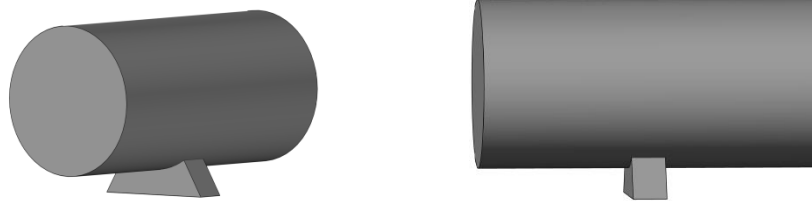
El ensayo realizado en esta investigación, utilizará el método de la resonancia por impacto de [10], difiriendo en que en lugar de usar un acelerómetro, se utilizará un hidrófono que capte las vibraciones en el cilindro producidas por el impacto del martillo sobre el espécimen.

Como se describió en 2.2.2, las ondas de compresión pueden transferirse a la atmósfera o cualquier otro medio en contacto con la superficie en vibración como sonido. Por lo que el micrófono funciona de igual forma que el acelerómetro de [10]. Sin embargo en este estudio se utilizó un hidrófono, el cual mide directamente por contacto directo con la superficie las vibraciones en el sólido, siendo además capaz de registrar vibraciones por ondas de corte, vibraciones que no sería capaz de registrar un micrófono común.

La ubicación en que se coloca el sensor (hidrófono) es como en la norma, en una cara lateral del cilindro.

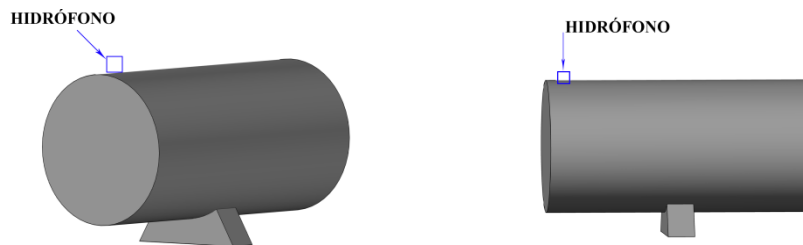
En conclusión, la metodología de la medición se resume en:

1. Los especímenes medidos y pesados se colocarán sobre una base de caucho de silicona como se muestra en la Figura 3.6. El apoyo deberá estar colocado en el punto medio de la longitud del cilindro.



**Figura 3.6.** Colocación del cilindro a ensayar por el método dinámico.

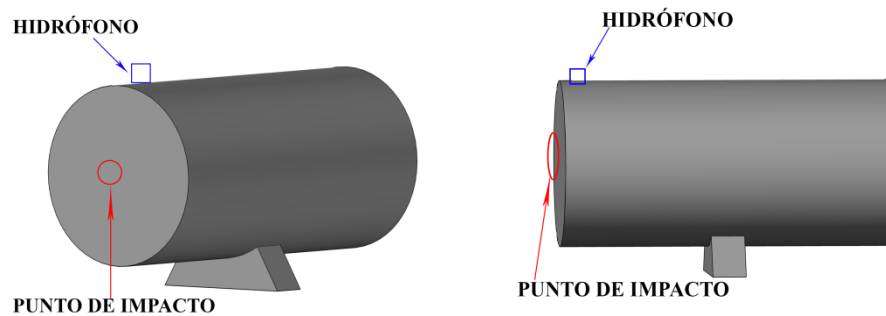
2. Se conectará el hidrófono al computador o un dispositivo de grabación, y se colocará en una de las caras laterales del cilindro a ensayar. En la Figura 3.7 se muestra un esquema de la ubicación utilizada para el sensor en los ensayos realizados.



**Figura 3.7.** Colocación del hidrófono de medición marcado con un recuadro azul.

3. El dispositivo de grabación (en el caso de este estudio el computador), se pondrá en modo de grabación, configurándolo para grabar con frecuencia de 44.1 KHz (es decir tomando 44,100 muestras cada segundo).
4. Acto seguido se dará un golpe con el martillo en el centro de una de las caras del cilindro. El golpe no requiere de una gran fuerza, con un golpe de baja intensidad, realizando un impacto completamente normal a la superficie e instantáneo (Es decir que la cabeza del martillo toque solo por un instante la cara del cilindro y no quede en contacto con la cara después de realizado el golpe).
5. La grabación debe pararse enseguida. En el ensayo realizado, se desarrolló una aplicación la cual automáticamente detiene la grabación después de un cuarto de segundo (0.25 s)

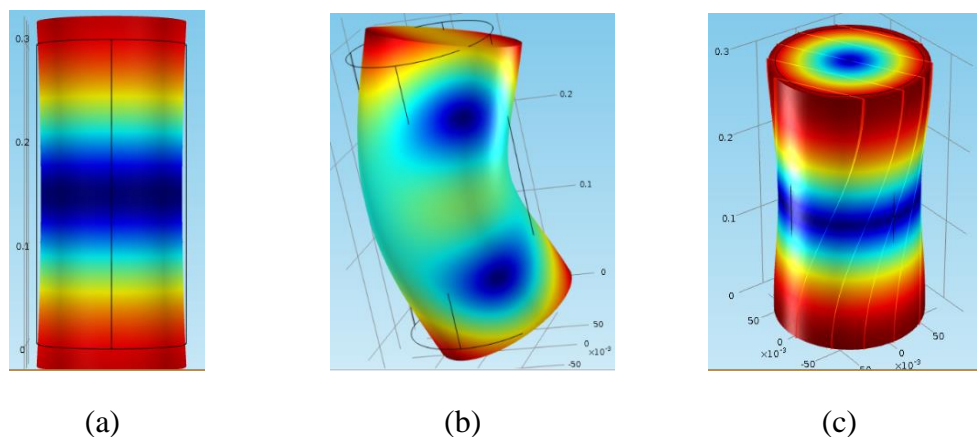
En la Figura 3.8 se muestra de forma esquemática el punto donde se realizaron los golpes en los cilindros ensayados.



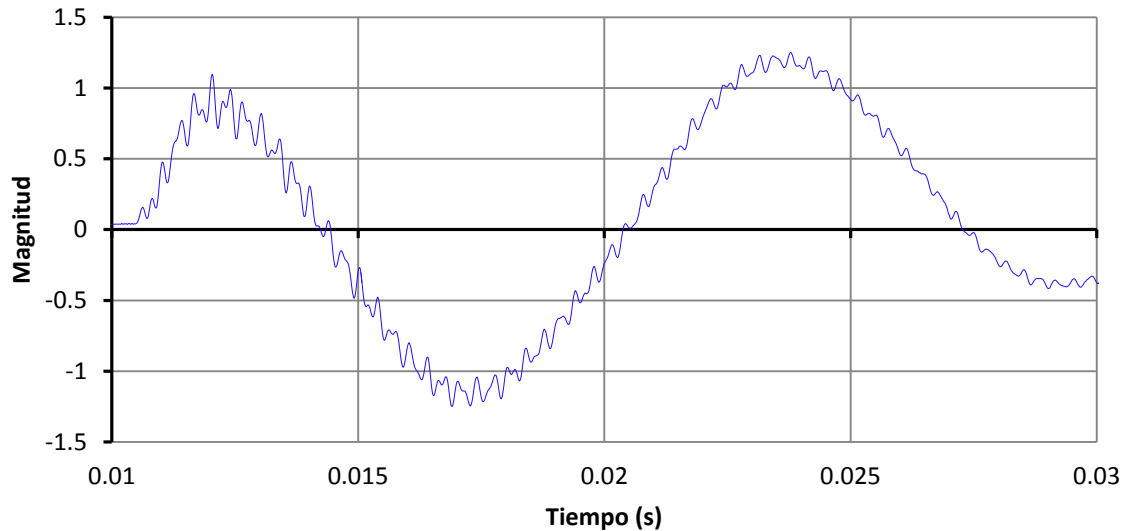
**Figura 3.8.** Esquema que indica el punto donde se impactará al cilindro.

El principio tras el que se justifica la colocación del hidrófono en un costado del cilindro, dicho sensor debe ser de una masa muy pequeña con el fin de restringir lo menos posible el cilindro en su vibración. Los resultados no se ven afectados por colocar el sensor en uno de los costados pues aunque las ondas de compresión en un principio vayan a viajar en el sentido en que se dio el golpe. Las ondas de compresión se dispersan a lo ancho de todo el cilindro, rebotando en la frontera del sólido. Lo anterior se ejemplifica en la Figura 3.9 donde además se muestra otros modos de vibrar (torsional y de flexión)

La forma de las ondas registradas por el hidrófono, relacionando la magnitud de la vibración con el tiempo tendrá una forma típica como la que se ejemplifica en la Gráfica 3.1.



**Figura 3.9.** Esquema de transmisión de las ondas en el cilindro, en:  
(a) Compresión; (b) Flexión; (c) Torsión



**Gráfica 3.1.** Ejemplo de un registro de vibraciones en uno de los ensayos

En esta investigación se realizó cuando menos 3 veces esta prueba a cada cilindro, para tener mayor cantidad de datos estadísticos por posibles errores en la medición.

### 3.3. Prueba Estática

Para el caso de las mediciones necesarias para la obtención del módulo elástico estático, se seguirán los estándares que establece la norma ASTM C 469-02 [2]. El cual ya se describió en el capítulo 2.1.3.1. Sin embargo en esta sección se detalla cual fue el equipo y herramientas utilizadas para los ensayos.

#### 3.3.1 Equipo y Herramientas de Medición.

##### Bases

Como establece [2], las caras extremas del cilindro deben tener una superficie completamente lisa con un margen de tolerancia para irregularidades de 0.05 mm y con un ángulo de inclinación máximo de  $0.5^\circ$ , de lo contrario es necesario capear las caras o repararlas de alguna manera. En este ensayo fueron utilizadas en su lugar bases con asiento de caucho en la cara donde se asienta el cilindro y recubrimiento metálico. Como se observa en la Figura 3.10 las bases colocadas en un cilindro ya ensayado.



**Figura 3.10.** Espécimen ya ensayado donde se observan las bases utilizadas en sus caras extremas.

### Prensa

Una prensa hidráulica como la que se muestra en la Figura 3.11 fue la utilizada para ensayar los especímenes para la prueba estática según la norma [2]



**Figura 3.11.** Prensa donde se ensayaron los cilindros para obtener su módulo elástico estático según la norma de la ASTM C 469 [2]

A esta prensa se le realizó una modificación, agregándole un dispositivo hidráulico electrónico, que envía lecturas de voltaje las variaciones en la presión hidráulica del aceite, directamente



proporcional a la presión ejercida en el cilindro ensayado. De esta manera pudiendo ser conectada a un computador para registrar medidas más precisas y en cualquier momento.

### Anillos

Anillos metálicos con un deformímetro, para la medición de los desplazamientos experimentados en las caras del cilindro debido al esfuerzo de compresión. El deformímetro que se utilizó tiene la capacidad de ser conectado a un computador y enviar las lecturas registradas a petición.



**Figura 3.12.** Anillos que se sujetan al cilindro de concreto conectados a un deformímetro para medir la deformación longitudinal.

### Computador

El modelo y el computador para realizar las pruebas es indistinto, al no cambiar los resultados independientemente de la máquina que reciba los datos. Durante los ensayos se vieron involucrados distintos equipos.

Los computadores utilizados cuentan con un software capaz de leer los datos arrojados por el deformímetro de los anillos, y de la prensa hidráulica. Conformándolos de forma automática en la gráfica de esfuerzo-deformación, habiendo previamente introducido las dimensiones del cilindro. De esta manera gracias al computador es posible tomar lecturas en determinados aumentos del esfuerzo ejercido por la prensa.

Se registrará de igual forma la carga última soportada por cada espécimen.



**Figura 3.13.** Prensa ensayando uno de los cilindros. Se puede observar los anillos con el deformimetro en funcionamiento.



**Figura 3.14.** Uno de los ensayos realizados. Se observa la vinculación del computador con deformimetro y prensa.



**Figura 3.15.** Otro de los cilindros ensayados ya llegado al punto de carga máxima.



**Figura 3.16.** Falla de un cilindro ensayado por compresión.

Enseguida se muestra la tabla con las lecturas obtenidas de uno de los cilindros ensayados. (Cilindro C16\_1049).

CARGA (Kg)	DEFORMACIÓN (mm)	CARGA (Kg)	DEFORMACIÓN (mm)	CARGA (Kg)	DEFORMACIÓN (mm)
-	0.0000	21,000	0.3400	42,000	0.8340
1,000	0.0130	22,000	0.3580	43,000	0.8710
2,000	0.0240	23,000	0.3770	44,000	0.9110
3,000	0.0390	24,000	0.3960	45,000	0.9520
4,000	0.0550	25,000	0.4150	46,000	1.0060
5,000	0.0700	26,000	0.4340	47,000	1.0710
6,000	0.0860	27,000	0.4540	47,900	1.2020
7,000	0.1030	28,000	0.4740		
8,000	0.1200	29,000	0.4930		
9,000	0.1360	30,000	0.5150		
10,000	0.1530	31,000	0.5370		
11,000	0.1700	32,000	0.5590		
12,000	0.1870	33,000	0.5810		
13,000	0.2030	34,000	0.6050		
14,000	0.2200	35,000	0.6290		
15,000	0.2360	36,000	0.6540		
16,000	0.2530	37,000	0.6820		
17,000	0.2700	38,000	0.7080		
18,000	0.2880	39,000	0.7370		
19,000	0.3050	40,000	0.7670		
20,000	0.3230	41,000	0.7990		

**Tabla 3.2.** Mediciones en lecturas de carga contra deformación.



**Figura 3.17.** Cilindro ensayado con strain gauge colocados en su costado.

### **3.4. Observaciones y Comentarios**

Es evidente que es necesario realizar primeramente la prueba de elasticidad dinámica, y posteriormente la estática, ya que esta última requiere la destrucción del espécimen para la obtención de su carga máxima.

A pesar de vibraciones ambientales que producen interferencia en las mediciones, siempre se pudo obtener un registro de vibraciones del cual es fácil identificar las frecuencias de vibración fundamentales. La variabilidad entre los resultados para distintos ensayos en un espécimen es despreciable.



## 4. ANÁLISIS

En este capítulo se describirán los análisis realizados tras el ensayo de los 33 cilindros. Para ejemplificar mejor el proceso de análisis se seguirá el caso de uno solo de los cilindros ensayados.

El proceso para el análisis de datos es el siguiente.

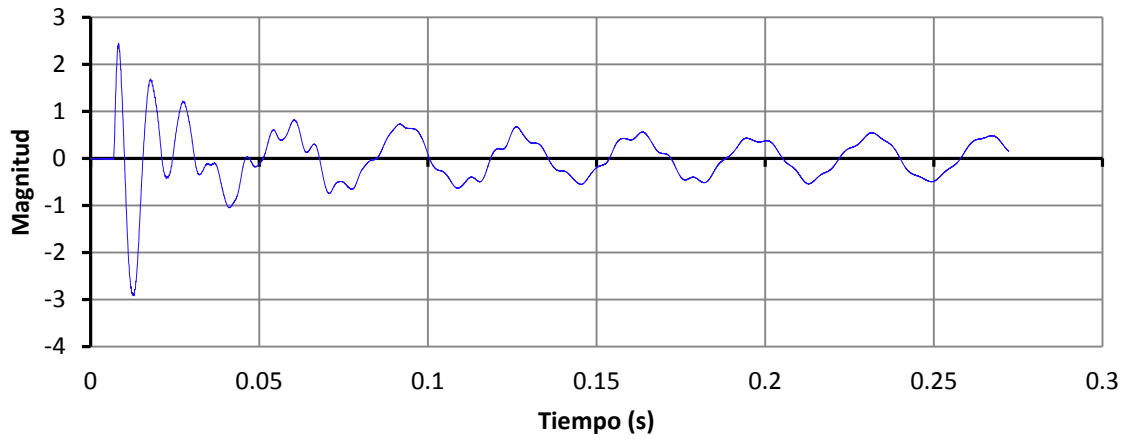
1. Transformación del espectro de tiempo de los registros de vibraciones del capítulo 3.2 al dominio de las frecuencias, utilizando la FFT que se describió en 2.4.2. Repitiendo para cada uno de los registros de todos los ensayos por cada cilindro (Al menos 3 ensayos por cada espécimen).
2. Se identificará la frecuencia fundamental de vibración longitudinal, en el espectro de frecuencias.
3. Con las propiedades geométricas y físicas del espécimen (dimensiones y peso), descritas en 3.1, basados en la teoría descrita en 2.2.2 y 2.3 se calculará el Módulo de Elasticidad Dinámico.
4. Se repetirá 2 y 3 para cada ensayo dinámico realizado en el mismo espécimen.
5. Se analizarán la totalidad de los resultados obtenidos en cada prueba, y se descartará cualquier valor que se salga del  $\pm 25\%$  el promedio de los módulos elásticos sin considerar dicho resultado. Entonces así obteniendo un valor para el módulo elástico dinámico para cada cilindro.
6. Se calculará el módulo elástico estático acorde a la norma ASTM C 469 [2].
7. Se analizarán los resultados obtenidos, comparando los módulos dinámicos contra los estáticos, observando el comportamiento de uno contra el otro, y buscando una relación entre los dos.

Para lo que resta del capítulo se considerarán los resultados del cilindro que corresponde al número “3” de la Tabla 3.1 denominado “C16\_1049”. De este cilindro se realizaron 6 pruebas dinámicas. La elección del cilindro fue de forma arbitraria.

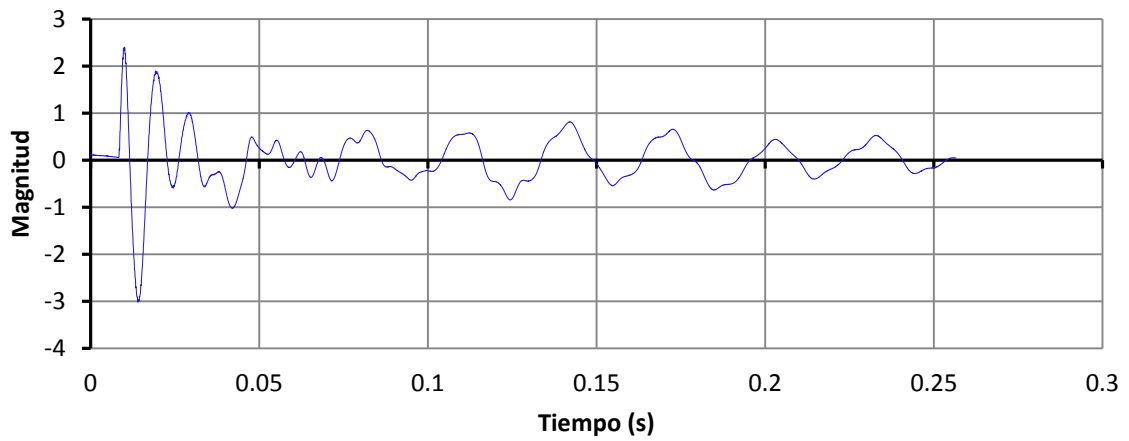
### 4.1. Transformación al Espectro de Frecuencias

En esta sección se procederá a convertir las vibraciones registradas en 3.2, las cuales se encuentran en el dominio del tiempo, habiendo registrado los desplazamientos en forma de vibración en la superficie por un sensor y convertido a términos eléctricos, como diferenciales de voltaje, con una velocidad de muestreo de 44.1 KHz.

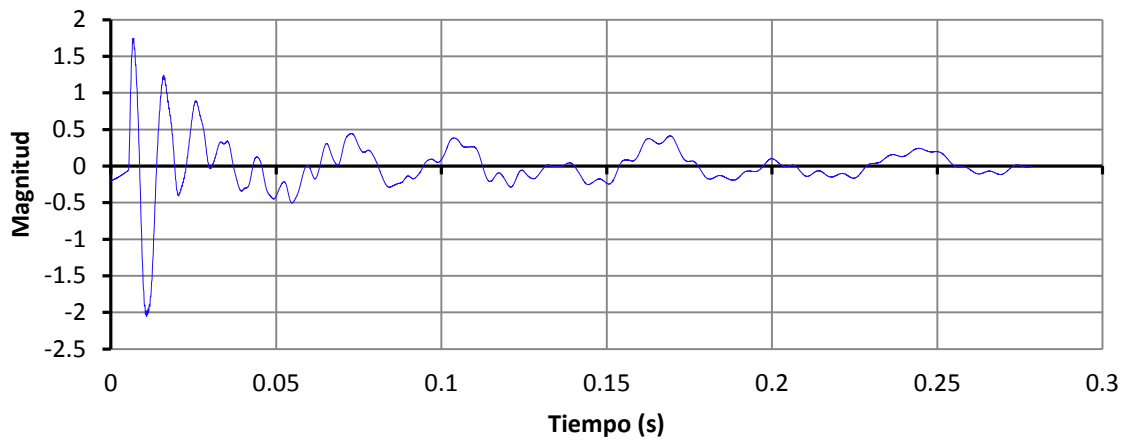
Dichas ondas se muestran de la Gráfica 4.1 a la Gráfica 4.6.



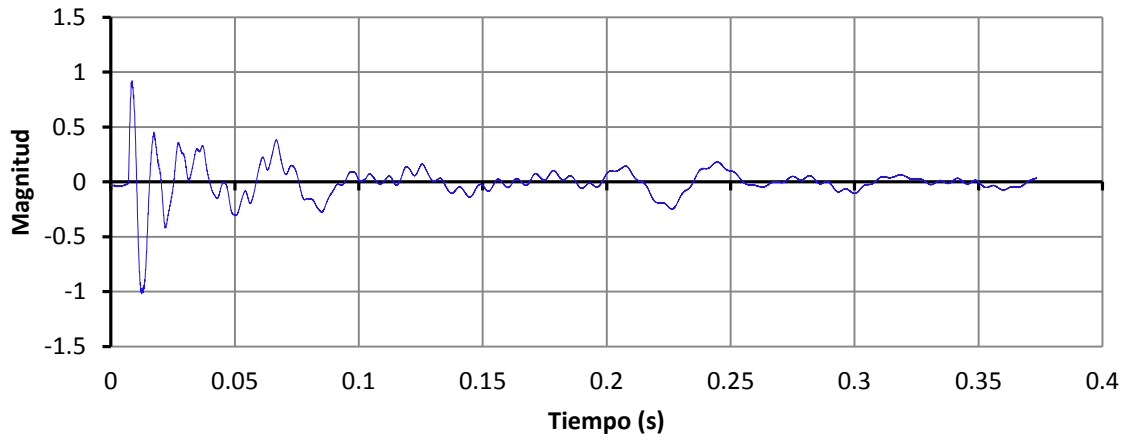
**Gráfica 4.1.** Registro de vibraciones del ensayo #1 para el cilindro c16\_1049.



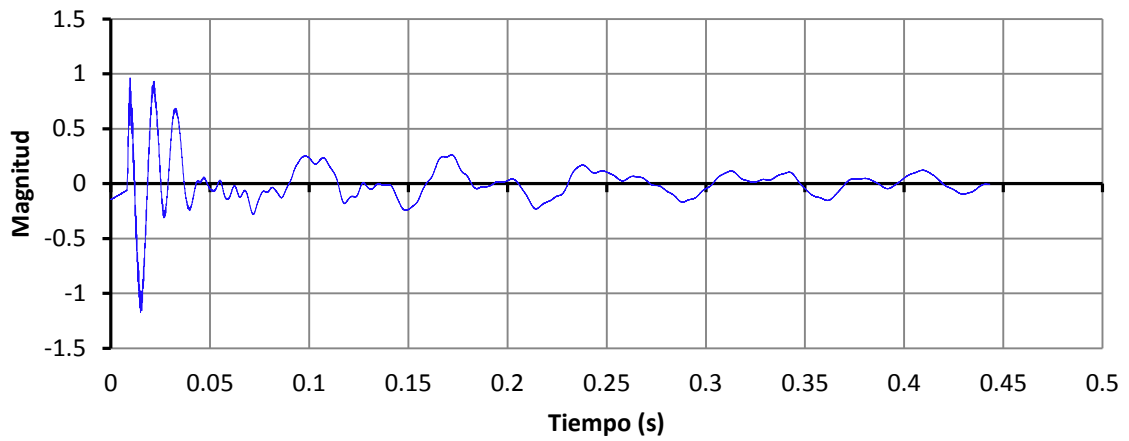
**Gráfica 4.2.** Registro de vibraciones del ensayo #2 para el cilindro c16\_1049.



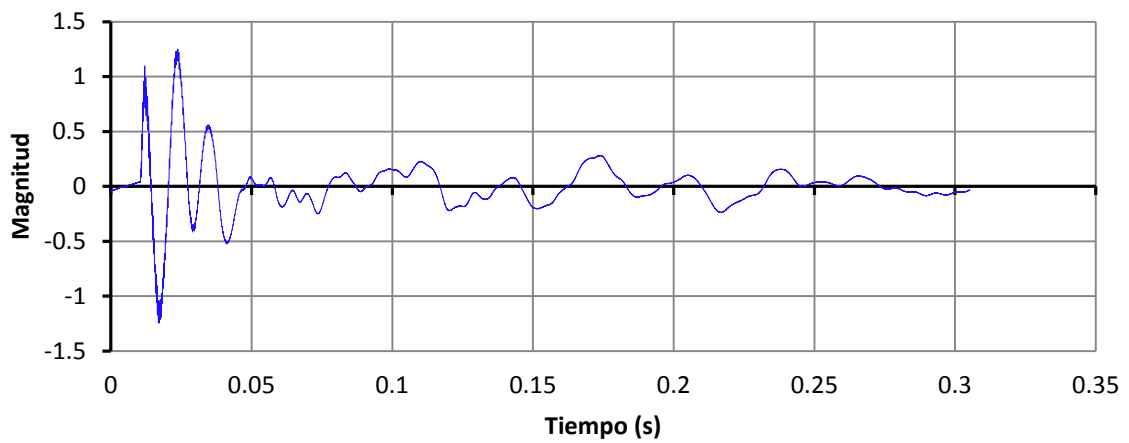
**Gráfica 4.3.** Registro de vibraciones del ensayo #3 para el cilindro c16\_1049



**Gráfica 4.4.** Registro de vibraciones del ensayo #4 para el cilindro c16\_1049



**Gráfica 4.5.** Registro de vibraciones del ensayo #5 para el cilindro c16\_1049



**Gráfica 4.6.** Registro de vibraciones del ensayo #6 para el cilindro c16\_1049



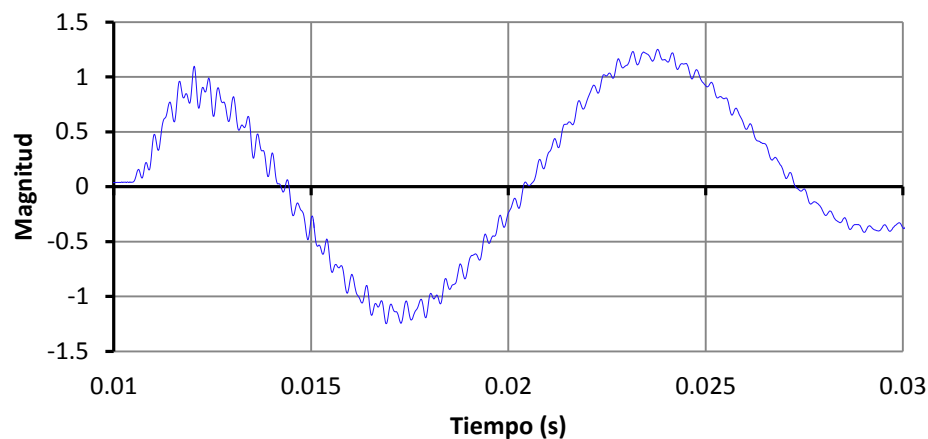
Las ondas son distintas unas con otras, siendo apreciables distintos valores en las magnitudes de unas con las otras, esta variación depende directamente de la fuerza del golpe dado, haciendo que las vibraciones tengan mayor fuerza, más teóricamente no interviene en la velocidad de la transmisión de la onda.

De igual forma de observar los espectros de vibración, se encuentra que todas comparten un pico inicial, que corresponde al evento del golpe del martillo sobre una de las caras, y este pico empieza a decrecer siguiendo una forma senoidal, debido a la amortiguación del concreto del cilindro.

Se podría decir que en todos los registros, los primeros 50 milisegundos, son prácticamente iguales. Es después donde se observa una gran variación de una onda con la otra, estos picos con una menor frecuencia apreciable por la mayor amplitud, pudiendo relacionarlos a sonidos graves, productos de la interferencia por vibraciones ambientales existentes durante la realización de los ensayos dinámicos de este cilindro.

Sin embargo, a simple vista sabemos que estas formas que se observan, no son las ondas que buscamos, pues la frecuencia fundamental de vibración longitudinal correspondiente al módulo elástico dinámico estará en el orden los 5khz (Deducido más adelante). Por lo que estas ondas amplias que se observan, son ondas graves que son vibraciones provenientes de la base y del medio ambiente, las cuales se mezclan con la vibración propia del cilindro.

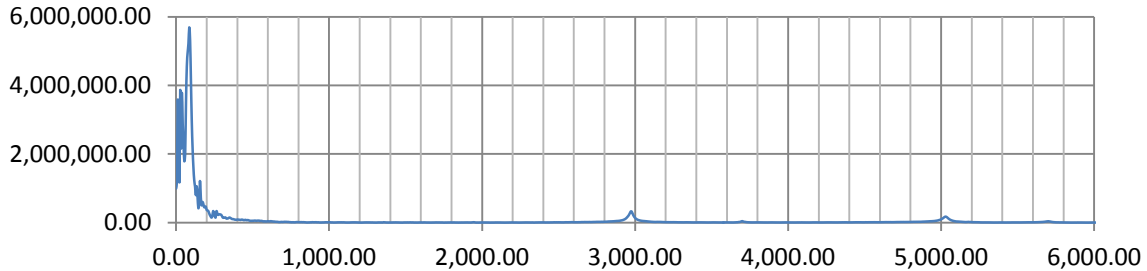
Si se hace un acercamiento a una parte de la onda inmediato al golpe (Gráfica 4.7), podemos observar que en estas ondas amplias existen pequeñas ondas con una frecuencia de vibración mayor. Siendo estas ondas las que nos son de interés conocer su frecuencia.



**Gráfica 4.7.** Acercamiento al registro de vibración del ensayo #6 del espécimen C16\_1049, en el intervalo de tiempo de los 10 a 30 milisegundos del ensayo.

Para agilizar el proceso de datos, se realizó un software capaz de leer los registros del hidrófono con extensión .wav y aplicarles la transformación rápida de Fourier para obtener su equivalente en

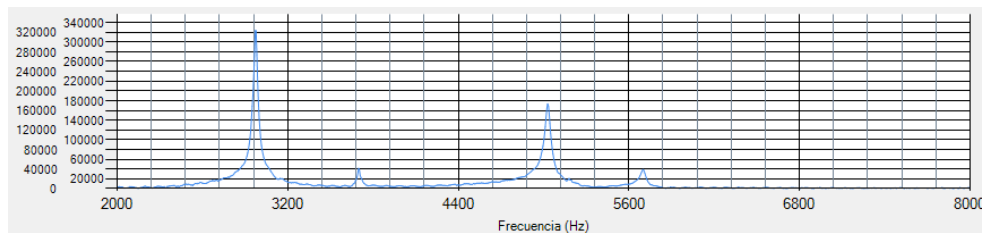
el dominio de las frecuencias. Realizando dicha transformación para el ensayo #6 del cilindro en cuestión, se obtiene un espectro de frecuencias con un ancho de banda de 22.05 KHz, el cual es muy amplio para ser desplegado, sin embargo se mostrarán fragmentos del espectro.



**Gráfica 4.8.** Rango del espectro de frecuencias de 0 a 6 KHz, para la prueba #6 del cilindro C16\_1049.

En la Gráfica 4.8 se puede ver picos de frecuencias debajo de los 200 Hz, los cuales representan las ondas de baja frecuencia y gran amplitud de los registros de vibración. Dicha ondas con frecuencia baja, como se mencionaba anteriormente, son el resultado de la interacción con la base y el medio ambiente.

Mientras que por otro lado, en la Gráfica 4.9 Gráfica 4.9, también se pueden ver unos picos significativos, aproximadamente en la frecuencia 2960 Hz y en la frecuencia 5,000 Hz.



**Gráfica 4.9.** Rango del espectro de frecuencias de 2 a 8 KHz, para la prueba #6 del cilindro C16\_1049.

## 4.2. Frecuencia Fundamental

Para identificar un aproximado en que valor se espera se encuentre la frecuencia fundamental, se realiza el proceso inverso de pasar del módulo de elasticidad a la frecuencia fundamental de vibración, mediante el módulo elástico estático<sup>9</sup>, acorde a la expresión (2.37)  $v_p = \sqrt{E/\rho}$  y (2.41), con los datos del cilindro C16\_1049 de la Tabla 3.1.

<sup>9</sup> Considerando un módulo elástico estático típico, considerando la relación del [15] en la expresión (2.17) considerando un concreto de 250 kg/cm<sup>2</sup>

$$\begin{aligned}
 L &= 30 \text{ cm} \\
 V &= 5,301 \text{ cm}^3 \\
 \rho &= 1,978.71 \text{ kg/m}^3 \\
 v_p &= f \cdot 2L = 60f \\
 E &= 1551392.64 \text{ N/cm}^2 = 155139264 \text{ kg / (cm s}^2\text{)} \\
 v_p &= \sqrt{155139264 / 0.001979}
 \end{aligned}$$

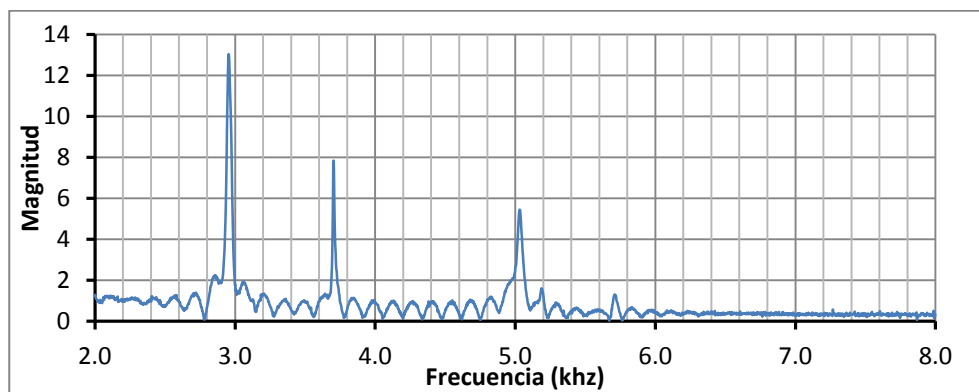
Igualando las dos expresiones de velocidad de onda, y despejando para  $f$

$$f = 4,666.793 \text{ Hz}$$

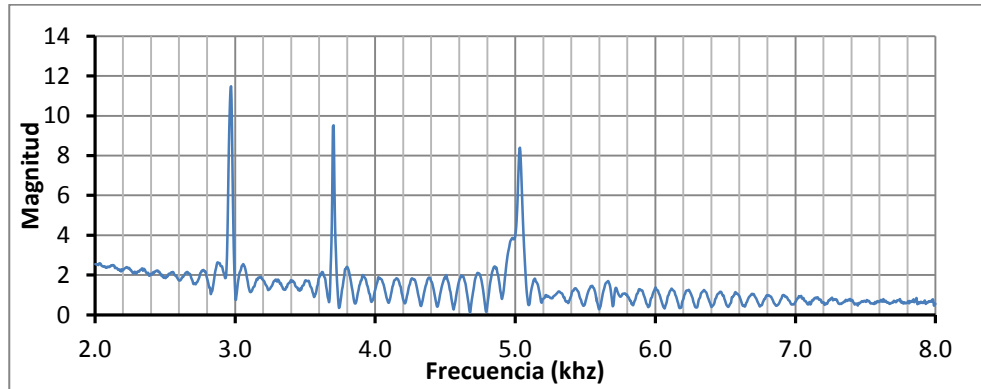
De esto concluimos que las frecuencias que buscamos se encuentran alrededor de los 5Khz, sabiendo que el módulo elástico dinámico es mayor que el módulo elástico estático, bajo la hipótesis planteada en el capítulo 1.3, en que el módulo elástico dinámico, correspondería a la pendiente de la recta tangente en el inicio de la curva de esfuerzo deformación del concreto, puesto que es el resultado de deformaciones micrométricas.

Por tanto se diseñó el software que extraerá de los registros del hidrófono, las frecuencias en el ancho de banda de entre 2 a 8 khz. Dentro del cual se realiza un barrido buscando los picos localizados por arriba de una línea imaginaria horizontal con un valor igual al promedio de las magnitudes de las frecuencias en el ancho de banda más diez veces la desviación estándar. (Estos parámetros se determinaron de forma empírica, para minimizar la obtención de picos de poca relevancia)

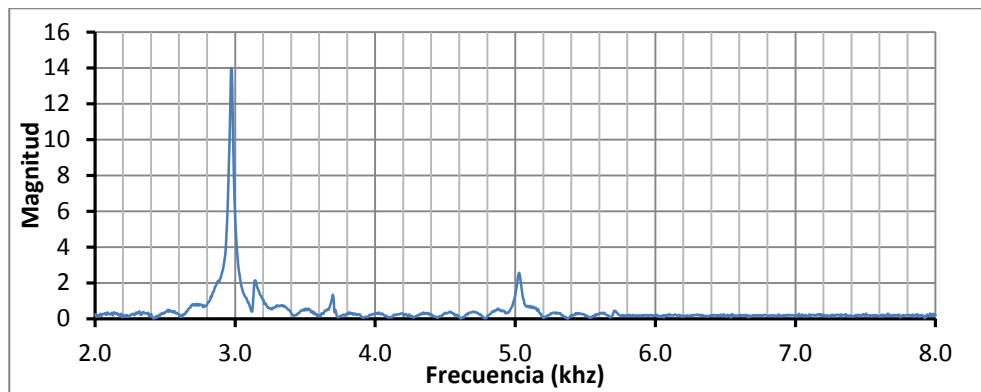
De la Gráfica 4.10 a la Gráfica 4.15 se exponen las gráficas con los espectros de frecuencias para cada prueba del espécimen analizado.



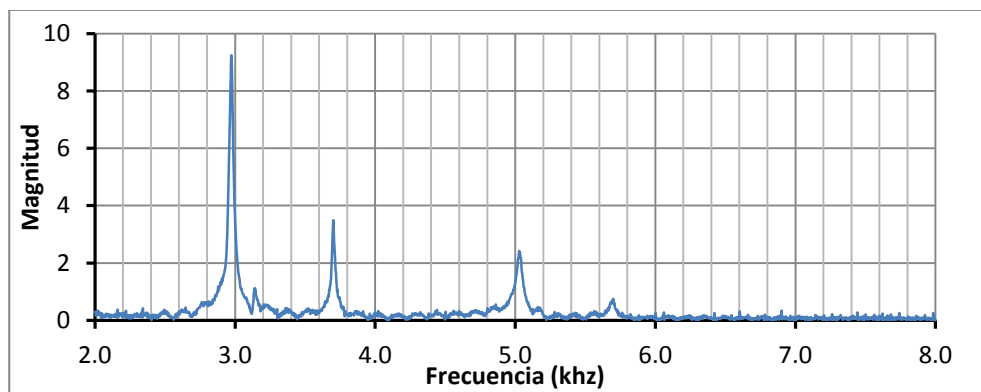
**Gráfica 4.10.** Espectro de Frecuencias para la prueba #1 del cilindro C16\_1049.



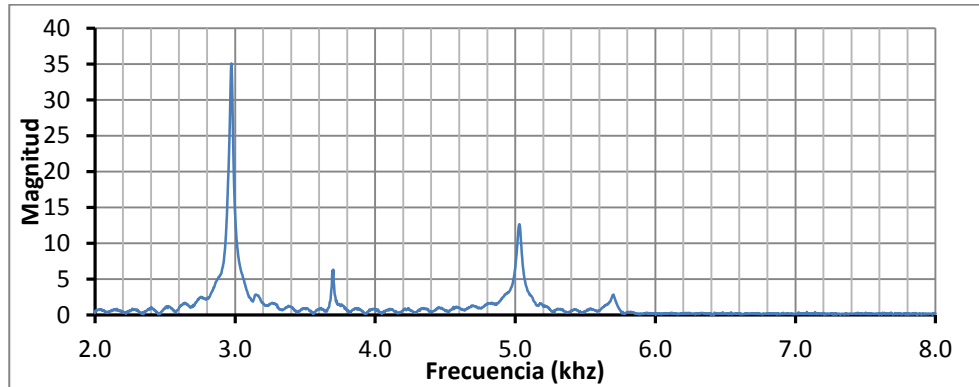
**Gráfica 4.11.** Espectro de Frecuencias para la prueba #2 del cilindro C16\_1049.



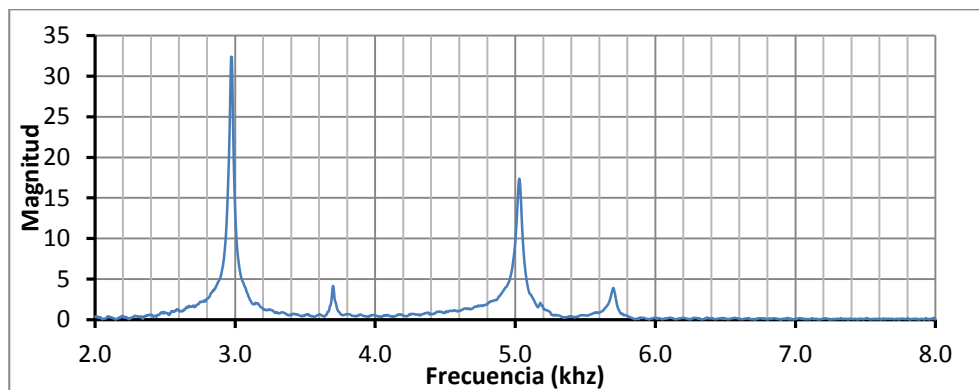
**Gráfica 4.12.** Espectro de Frecuencias para la prueba #3 del cilindro C16\_1049.



**Gráfica 4.13.** Espectro de Frecuencias para la prueba #4 del cilindro C16\_1049.



**Gráfica 4.14.** Espectro de Frecuencias para la prueba #5 del cilindro C16\_1049.



**Gráfica 4.15.** Espectro de Frecuencias para la prueba #6 del cilindro C16\_1049.

Algunas de las gráficas del espectro de frecuencias, tienen líneas muy finas y constantes, como es el caso de las gráficas Gráfica 4.14 y Gráfica 4.15, mientras que otras gráficas presentan una gran cantidad de pequeños picos en todo el ancho de banda analizado, Gráfica 4.10 y Gráfica 4.11. La causa de esto es debido a la interferencia existente al momento de realizar la prueba, comparando los registros del hidrófono (Gráfica 4.1 y Gráfica 4.2 respectivamente), se ilustra el punto, al tener mayor amplitud las ondas después del rango de relevancia.

De la observación de las gráficas se pueden observar 3 picos coincidiendo en las mismas frecuencias para cada una de las pruebas realizadas. Estos picos corresponden a cada uno de los modos de vibrar principales, longitudinal, transversal y por torsión. Debido al análisis realizado previamente en este mismo capítulo, sabemos que la frecuencia de vibración por compresión longitudinal oscilará alrededor de los 5 khz. Por lo que los restantes corresponden al transversal y al torsional.

Para identificar cuál corresponde a cual de forma rápida hacemos uso de las expresiones (2.46) y (2.47) que vienen en la norma [10]. Estas dos expresiones obtienen el módulo elástico dinámico en función de las frecuencias fundamentales transversal y longitudinal respectivamente. Sin embargo

se debe llegar al mismo resultado por lo que de igualar estas dos expresiones podemos llegar a relacionar ambas frecuencias.

$$(4.1) \quad E_D = CMn^2 = D M (n')^2$$

$$(4.2) \quad 1.6067 \frac{L^3 T}{d^4} M n^2 = 5.093 \frac{L}{d^2} M (n')^2$$

Reduciendo literales y dejando la frecuencia fundamental transversal en función de la longitudinal:

$$(4.3) \quad n = 1.78041 \frac{L}{d \sqrt{T}} n'$$

Donde  $T$  es el factor de corrección de Timoshenko el cual depende de la relación del radio de giro  $K$  (para un cilindro es igual a  $d/4$ ), entre la longitud del cilindro  $L$ , y del valor del coeficiente de Poisson. Para distintos valores de  $T$  dados un  $K/L$  se puede consultar la Tabla 2.6 o mediante la ecuación (2.48).

Para el caso específico de un cilindro de 15 cm de diámetro y 30 cm de altura como es el caso estudiado y suponiendo un coeficiente de Poisson igual a 0.17. Se tiene un valor de 2.1125 para  $T$ , sustituyendo estos valores en la expresión (4.3) obtenemos:

$$(4.4) \quad n = 0.6125 n'$$

Por lo que sabemos entonces que el pico que se localice aproximadamente a un 60% de la frecuencia fundamental longitudinal será la frecuencia a flexión o de movimiento transversal. Ese parámetro también servirá para poder localizar los picos para concretos con altos módulos de elasticidad, debido a que la correlación en estas frecuencias solo depende de las relaciones geométricas y del coeficiente de Poisson, el cual no cambia mucho al cambiar el módulo elástico.

De igual forma con la relación (4.3) se puede obtener el valor del coeficiente de Poisson al conocer las dos frecuencias fundamentales longitudinales y transversales, encontrando el valor necesario de  $T$  y a su vez de  $\mu$  que satisfacen la condición en la expresión (2.48).

Posteriormente ya teniendo estas gráficas, se realiza la búsqueda de picos por encima del límite antes propuesto (igual al promedio de las magnitudes de las frecuencias en el ancho de banda especificado, más 10 veces la desviación estándar en dicho intervalo). Los 5 picos de mayor magnitud para cada una de las pruebas, se muestra en las tablas siguientes.

#	Frecuencia (Hz)	Magnitud
1	2,952.74	130,329.46
2	3,703.71	78,382.53
3	5,033.39	54,374.24
4	5,186.81	16,064.29
5	2,721.26	13,922.88

(a)

#	Frecuencia (Hz)	Magnitud
1	2,971.58	114,418.09
2	3,703.71	95,092.06
3	5,033.39	83,998.75
4	2,034.89	25,908.26
5	3,057.71	25,523.99

(b)

**Tabla 4.1.** Picos encontrados en el ancho de banda de 2 a 8 khz, para la prueba #1 (a) y la prueba #2 (b)

#	Frecuencia (Hz)	Magnitud
1	2,971.58	139,763.11
2	5,028.00	25,675.00
3	3,143.85	21,472.64
4	3,698.33	13,417.33
5	3,337.65	7,544.71

(a)

#	Frecuencia (Hz)	Magnitud
1	2,974.27	92,439.06
2	3,701.02	34,904.91
3	5,028.00	24,179.32
4	3,141.16	11,234.62
5	5,700.92	7,437.40

(b)

**Tabla 4.2.** Picos encontrados en el ancho de banda de 2 a 8 khz, para la prueba #3 (a) y la prueba #4 (b)

#	Frecuencia (Hz)	Magnitud
1	2,974.27	350,773.21
2	5,030.69	126,430.04
3	3,701.02	63,122.37
4	5,700.92	28,460.63
5	2,640.51	16,982.70

(a)

#	Frecuencia (Hz)	Magnitud
1	2,971.58	323,632.42
2	5,028.00	173,643.64
3	3,698.33	41,569.24
4	5,700.92	39,172.85
5	5,178.74	20,882.02

(b)

**Tabla 4.3.** Picos encontrados en el ancho de banda de 2 a 8 khz, para la prueba #5 (a) y la prueba #6 (b)

De comparar estas tablas con los picos en gráficas de los espectros de frecuencias (Gráfica 4.10 - Gráfica 4.15) uno puede determinar el pico de interés. El cual se concluye en la Tabla 4.4 mostrando las frecuencias fundamentales obtenidas para el cilindro C16\_1049.

# Prueba	Frecuencia Fundamental (Hz)
1	5,033.39
2	5,033.39
3	5,028.00
4	5,028.00
5	5,030.69
6	5,028.00

**Tabla 4.4.** Frecuencias Fundamentales de cada prueba en el cilindro C16\_1049.

### 4.3. Módulo de Elasticidad Dinámico

Como se describió en la sección 2.2.2 y 2.3, y ya se utilizó en el inicio del capítulo 4.2 aunque sin ahondar mucho en ella. La ecuación que relaciona la frecuencia con el módulo de elasticidad se plasma en (4.5) siendo el resultado de substituir en una sola las expresiones: (2.37) (2.40) y (2.41)

$$(4.5) \quad 2Lf = \sqrt{\frac{E_D}{\rho}}$$

Despejando para E

$$(4.6) \quad E_D = 4 (Lf)^2 \rho$$

Donde

- L = Longitud del espécimen, (cm)
- f = Frecuencia fundamental longitudinal, (Hz, 1/s)
- $\rho$  = Densidad de cilindro, ( $\text{kg}/\text{cm}^3$ )
- $E_D$  = Modulo de Elasticidad Dinámico, (Pa)

Siendo esta fórmula la obtenida de la demostración del capítulo 2.3, sin embargo aunque esta parezca diferente a la expresada en la norma ASTM C 215 [10], en la expresión que encontramos previamente en la expresión (2.47) . Sin embargo se trata de la misma expresión, lo que se demuestra a continuación:



Sustituyendo la fórmula para la densidad ( $M/V$ ) Siendo el Volumen igual al Área del círculo por la altura del cilindro.

$$(4.7) \quad 4 L^2 f^2 \left( \frac{4 M}{\pi d^2 L} \right)$$

Simplificando las literales, multiplicando y dividiendo las constantes obtenemos:

$$(4.8) \quad 5.092958 * \frac{L}{d^2} M f^2 = DM(n')^2$$

Dónde:

D	= Definición dada en [10] 5.093 (L/d <sup>2</sup> ) para un cilindro
d	= Diámetro del cilindro
M	= Masa del cilindro

Teniendo los datos del cilindro C16\_1049:

<b>Diametro:</b>	15.00 cm
<b>Altura:</b>	30.00 cm
<b>Peso:</b>	10,490.00 grs

Se calculan sus propiedades básicas como el área de las caras extremas, el volumen y su densidad:

<b>Area</b>	176.71 cm <sup>2</sup>
<b>Volumen</b>	5,301 cm <sup>3</sup>
<b>Densidad</b>	1.979 t/m <sup>3</sup>

Se sustituyen los valores de cada prueba y las propiedades del cilindro en la expresión (4.6) obteniéndose así el módulo de elasticidad dinámico para cada caso de la prueba. Dichos módulos de elasticidad se muestran en la siguiente tabla (Tabla 4.5)

Medición:	Frecuencia fundamental (Hz)	Módulo de Elasticidad Dinámico (kg/cm <sup>2</sup> )
1	5,033.39	183,965.31
2	5,033.39	183,965.31
3	5,028.00	183,572.01
4	5,028.00	183,572.01
5	5,030.69	183,768.61
6	5,028.00	183,572.01

**Tabla 4.5.** Módulos de Elasticidad dinámico para cada una de los ensayos dinámicos para el cilindro C16\_1049.

Ninguno de los valores obtenidos se sale de la media, encontrándose valores prácticamente iguales en su totalidad. Por tanto se incluyen todos los valores en el cálculo de un módulo de elasticidad dinámico promedio de los resultados obtenidos. Tomando así el valor de

$$(4.9) \quad E_D = 183,753.87 \text{ kg/cm}^2$$

#### 4.4. Módulo de Elasticidad Estático.

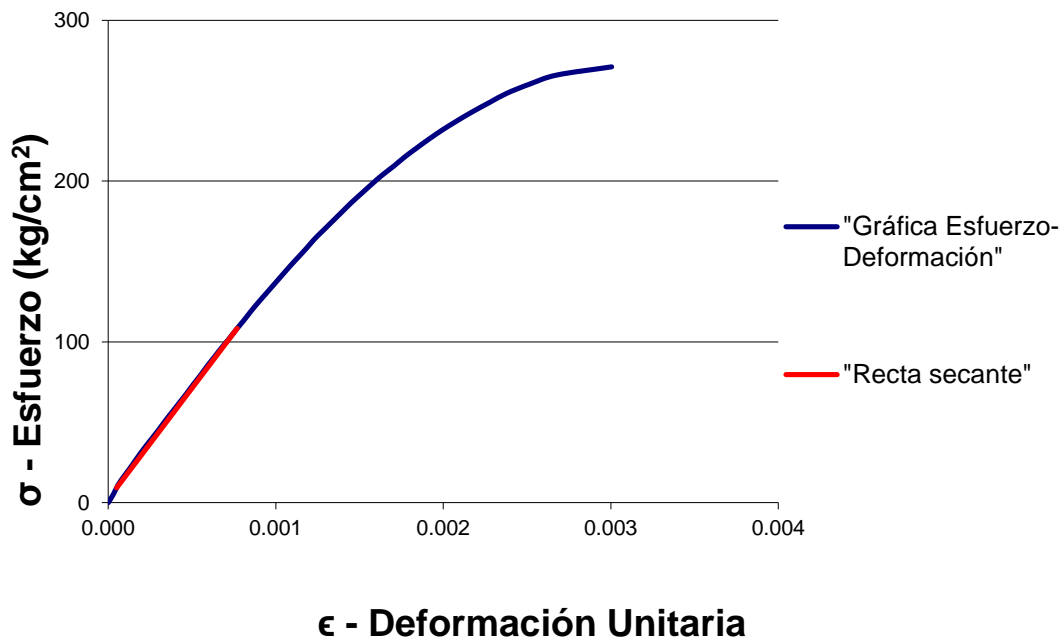
Ya habiendo obtenido el módulo de elasticidad dinámico, se procede a calcular el módulo estático para poder encontrar una correlación entre ambos módulos. Esto se calcula conforme a la norma [2].

Antes que nada las lecturas registradas por el deformímetro es necesario aplicarles un factor de corrección igual a 0.0025 (1/400), para así obtener una deformación unitaria. Además se calcula el esfuerzo ejercido por la prensa sobre el cilindro, dividiendo la fuerza aplicada entre el área de las caras del cilindro.

Habiendo hecho esto, es posible graficar ambos conjuntos de datos, representando el eje de las abscisas la deformación unitaria, y en el eje de las ordenadas el esfuerzo. La gráfica para el cilindro ejemplo (C16\_1049) se muestra en la Gráfica 4.16. De igual forma se muestra la tabla con los datos para la formulación de la gráfica.

Esfuerzo (kg/cm <sup>2</sup> )	e	Esfuerzo (kg/cm <sup>2</sup> )	e	Esfuerzo (kg/cm <sup>2</sup> )	e
-	0.000000	118.84	0.0008500	237.67	0.0020850
5.66	0.0000325	124.49	0.0008950	243.33	0.0021775
11.32	0.0000600	130.15	0.0009425	248.99	0.0022775
16.98	0.0000975	135.81	0.0009900	254.65	0.0023800
22.64	0.0001375	141.47	0.0010375	260.31	0.0025150
28.29	0.0001750	147.13	0.0010850	265.97	0.0026775
33.95	0.0002150	152.79	0.0011350	271.06	0.0030050
39.61	0.0002575	158.45	0.0011850		
45.27	0.0003000	164.11	0.0012325		
50.93	0.0003400	169.77	0.0012875		
56.59	0.0003825	175.42	0.0013425		
62.25	0.0004250	181.08	0.0013975		
67.91	0.0004675	186.74	0.0014525		
73.56	0.0005075	192.40	0.0015125		
79.22	0.0005500	198.06	0.0015725		
84.88	0.0005900	203.72	0.0016350		
90.54	0.0006325	209.38	0.0017050		
96.20	0.0006750	215.04	0.0017700		
101.86	0.0007200	220.69	0.0018425		
107.52	0.0007625	226.35	0.0019175		
113.18	0.0008075	232.01	0.0019975		

Tabla 4.6. Valores de esfuerzo contra deformación unitaria para la prueba del módulo elástico estático del cilindro C16\_1049.



Gráfica 4.16. Esfuerzo-deformación del cilindro de concreto C16\_1049.

Habiendo registrado la carga máxima resistida en 3.3, se calcula el  $f'c$  y el 40% de este valor, el cual es el punto de referencia para trazar la recta secante que se menciona en [2], cuya pendiente define el módulo de elasticidad estático.

Para el cilindro ejemplo, la carga máxima resistida fue de 47.9 Ton, que dividida entre el área del cilindro igual a  $176.71 \text{ cm}^2$ , se obtiene un  $f'c$  de **271.06 kg/cm<sup>2</sup>**. Por lo que el 40% del  $f'c$  es **108.42 kg/cm<sup>2</sup>**

Conociendo estos valores, aún hace falta conocer otros dos datos para el cálculo de la pendiente de la recta secante, conforme a la norma de ASTM. Para el esfuerzo inicial que corresponde a una deformación unitaria de 0.00005, se realiza una interpolación entre los valores que fueron registrados. De forma análoga, se interpola para conocer la deformación unitaria que corresponde al esfuerzo buscado (0.4  $f'c$ ).

$$(4.10) \quad S_1 = 5.66 + \frac{11.32-5.66}{0.00006-0.0000325} * (0.00005 - 0.0000325) = 9.26 \text{ kg/cm}^2$$

$$(4.11) \quad \epsilon_2 = 0.0007625 + \frac{0.0008075-0.0007625}{113.18-107.52} (108.42 - 107.52) = 0.0007697$$

Con estos cuatro valores es posible calcular la pendiente de la recta secante, sustituyéndolos en la expresión que proporciona la norma [2].

$$(4.12) \quad E = \frac{S_2-S_1}{\epsilon_2-0.00005}$$

La recta secante descrita por estos puntos se puede apreciar en la Gráfica 4.16 marcada con una línea roja y la pendiente de esta secante se obtiene con la expresión (4.12) obteniendo el valor del módulo de elasticidad estático: **137,785 kg/cm<sup>2</sup>**

#### 4.5. Observaciones y Comentarios

Habiendo realizado el análisis de los datos de los ensayos dinámico y estático, obteniendo así los respectivos módulos de elasticidad. Podemos realizar una comparación entre ambos módulos para el cilindro C16\_1049:

Comparativa entre módulos		
Cilindro	Módulo Estático	Módulo Dinámico
C16_1049	137,784.52	183,735.87

**Tabla 4.7.** Comparativa entre los resultados obtenidos del análisis para el cilindro C16\_1049.

Sin embargo es necesario repetir las mediciones y análisis desarrollados en los capítulos 3 y 4 con el resto de los 32 especímenes restantes, para poder llegar a una conclusión viendo si existe una correlación entre los módulos y si es posible obtener el módulo elástico estático en función del dinámico de forma sencilla.

Los resultados del resto de los cilindros se encuentran en la siguiente tabla, en donde se resumen todos los resultados relevantes para cada uno de cilindros.

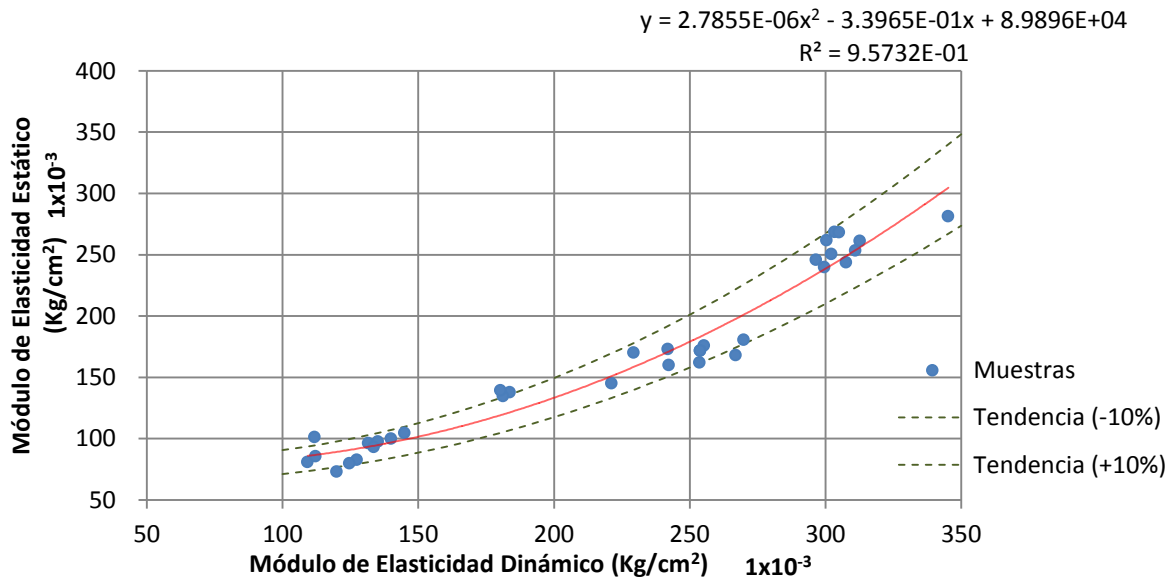
#	CILINDRO	Diámetro (cm)	Altura (cm)	Peso (grs)	Densidad (kg/m <sup>3</sup> )	f'c (Kg/cm <sup>2</sup> )	MODULO DE ELASTICIDAD	
							ESTÁTICO (Kg/cm <sup>2</sup> )	DINÁMICO (Kg/cm <sup>2</sup> )
1	c14_1174	15.00	30.00	11,740	2,214.49	203.72	172,968.43	241,969.17
2	c15_1182	15.00	30.00	11,820	2,229.58	184.48	170,161.76	229,382.99
3	c16_1049	15.00	30.00	10,490	1,978.71	271.06	137,784.52	183,735.87
4	c17_1039	15.00	30.00	10,390	1,959.85	143.73	96,221.45	131,664.47
5	c19_1060	15.00	30.00	10,600	1,999.46	143.73	97,775.34	135,155.05
6	c20_1073	15.00	30.00	10,730	2,023.98	122.23	99,981.08	139,936.30
7	c22_1035	15.00	30.00	10,350	1,952.30	159.01	93,339.79	133,600.13
8	c23_1024	15.00	30.00	10,240	1,931.55	129.02	82,680.42	127,406.06
9	c24_1038	15.00	30.00	10,380	1,957.96	250.69	134,660.95	181,286.10
10	c25_884	15.00	30.00	8,840	1,667.47	214.47	80,941.00	109,277.01
11	c26_934	15.00	30.00	9,340	1,761.79	72.43	73,092.21	119,987.57
12	c27_940	15.00	30.00	9,400	1,773.10	83.75	79,866.64	124,636.76
13	c28_887	15.00	30.00	8,870	1,673.13	181.08	85,569.65	112,207.91
14	c29_1252	15.00	30.00	12,520	2,361.62	517.22	281,432.71	345,276.83
15	cilindro1	15.00	30.00	12,090	2,280.51	472.51	180,717.74	269,940.74
16	cilindro2	15.02	30.00	11,630	2,187.91	362.90	145,036.23	221,170.27
17	cilindro3	14.90	29.90	11,630	2,230.73	411.20	160,008.25	242,366.98
18	cilindro4	15.00	30.00	12,100	2,282.40	397.25	168,030.92	266,931.11
19	cilindro5	14.90	29.90	11,950	2,292.10	391.13	175,931.66	255,330.57
20	cilindro8	15.00	30.00	12,030	2,269.20	416.49	162,216.90	253,604.44
21	cilindro10	15.00	30.00	11,910	2,246.56	350.85	171,745.52	253,898.76
22	cilindro11	15.00	30.00	11,910	2,246.56	129.02	171,745.52	253,898.76
23	cilindro12fc150	15.10	30.00	10,570	1,967.48	101.63	139,295.63	180,260.76
24	cilindro21	15.00	30.00	10,350	1,952.30	164.11	104,774.50	144,989.90
25	C2_11982	14.90	30.00	11,982	2,290.58	347.54	261,864.83	300,479.89
26	C7_12323	15.10	30.10	12,323	2,286.16	335.05	243,671.57	307,622.71
27	C8_12234	15.10	30.10	12,323	2,286.16	340.66	253,516.19	311,067.32
28	C1_N3A4	14.90	29.90	12,027	2,306.87	344.68	268,605.50	303,386.85
29	C4_N1TT	15.00	29.90	12,187	2,306.50	338.40	261,332.63	312,681.45
30	C5_N5A4	14.90	29.90	11,781	2,259.69	343.53	239,948.17	299,566.12
31	C6_N5TT	15.00	30.00	12,074	2,277.50	338.96	250,494.96	302,244.71
32	C9_N4TT	15.00	30.00	12,071	2,276.93	338.96	245,774.08	296,529.42
33	C10_N3TT	14.90	30.00	12,104	2,313.90	344.10	268,283.98	305,080.21

**Tabla 4.8.** Resultados obtenidos de los análisis dinámicos y estáticos de los especímenes ensayados.

En la Tabla 4.8 se puede observar que el módulo elástico dinámico, en todos los casos, resultó mayor al módulo estático.

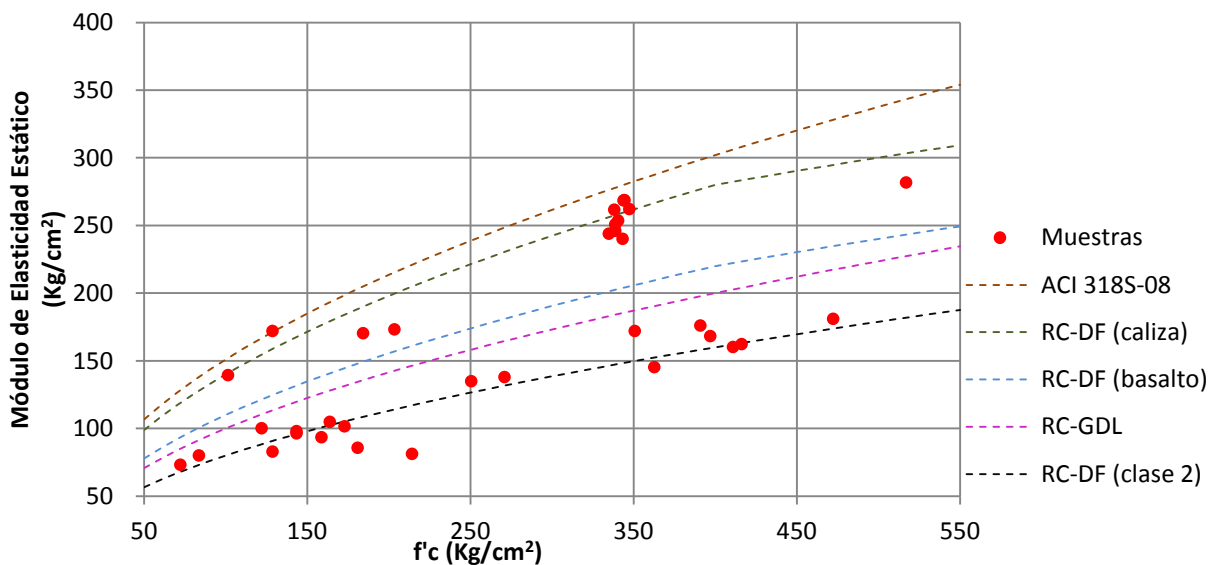
En la Gráfica 4.17 se observa una correlación de un módulo contra el otro, en esta se ha agregado una línea de tendencia cuadrática generada por el mismo software (EXCEL®) Se puede ver que existe una muy buena aproximación a los resultados.

Además en la misma gráfica se han agregado dos líneas paralelas a la línea de tendencia ubicadas  $\pm 10\%$  Abarcando prácticamente la totalidad de las muestras.



**Gráfica 4.17.** Módulo de elasticidad estático contra módulo dinámico

Además se vuelve a agregar la Gráfica 1.1 donde se obtiene el módulo de elasticidad de los cilindros ensayados, según las propuestas de estimación en función del  $f'c$ , por parte de las distintas normativas de construcción, contra el valor del módulo obtenido por descrito en la sección 4.4.



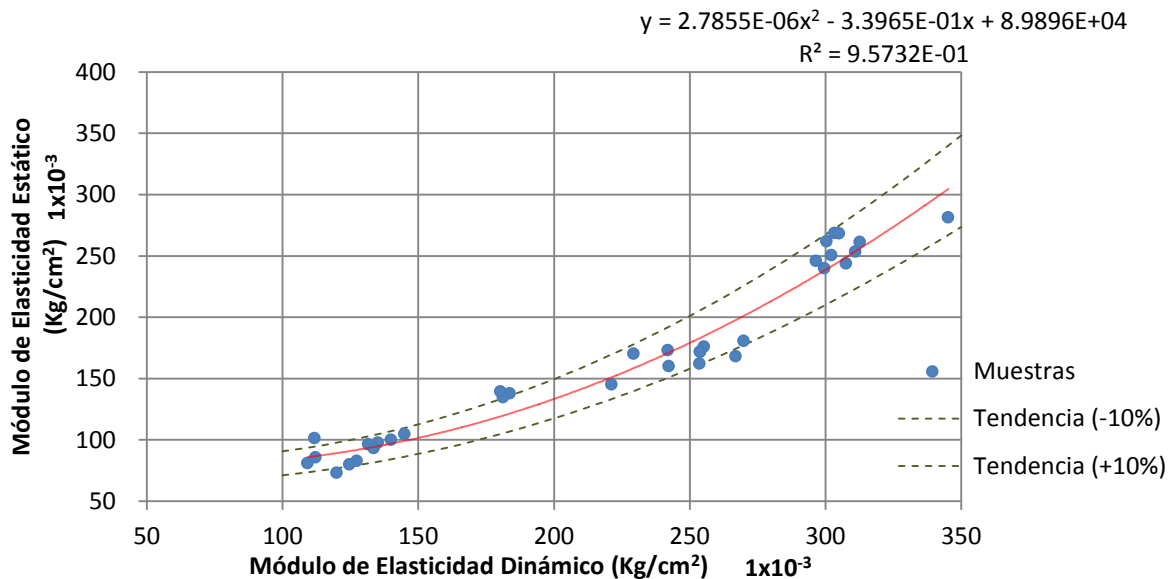
**Gráfica 4.18.** Grafica del módulo de elasticidad según la normativa para estimarlo contra los resultados obtenidos de los ensayos.

## 5. CONCLUSIONES

Habiendo formulado una hipótesis base, revisado el marco teórico, en conjunto con el análisis de los datos obtenidos de los ensayos, es posible llegar a una conclusión que corrobore la hipótesis base.

La hipótesis planteada en el inicio de este trabajo, es la existencia de una relación entre el módulo elástico dinámico con respecto al estático, con la finalidad de poder obtener el módulo estático habiendo solo medido el dinámico.

Como se pudo apreciar previamente en el Capítulo 4 en la Gráfica 4.17, la cual se vuelve a mostrar enseguida, se encontró que efectivamente se puede relacionar el módulo de elasticidad dinámico con el módulo estático. Obteniendo la relación del módulo dinámico contra el módulo estático para las muestras, se encontró que prácticamente todas se encuentran en el intervalo  $\pm 10\%$  de la línea de tendencia propuesta, en la Gráfica 5.1 se aprecia la relación y el margen de tolerancia del 10%.

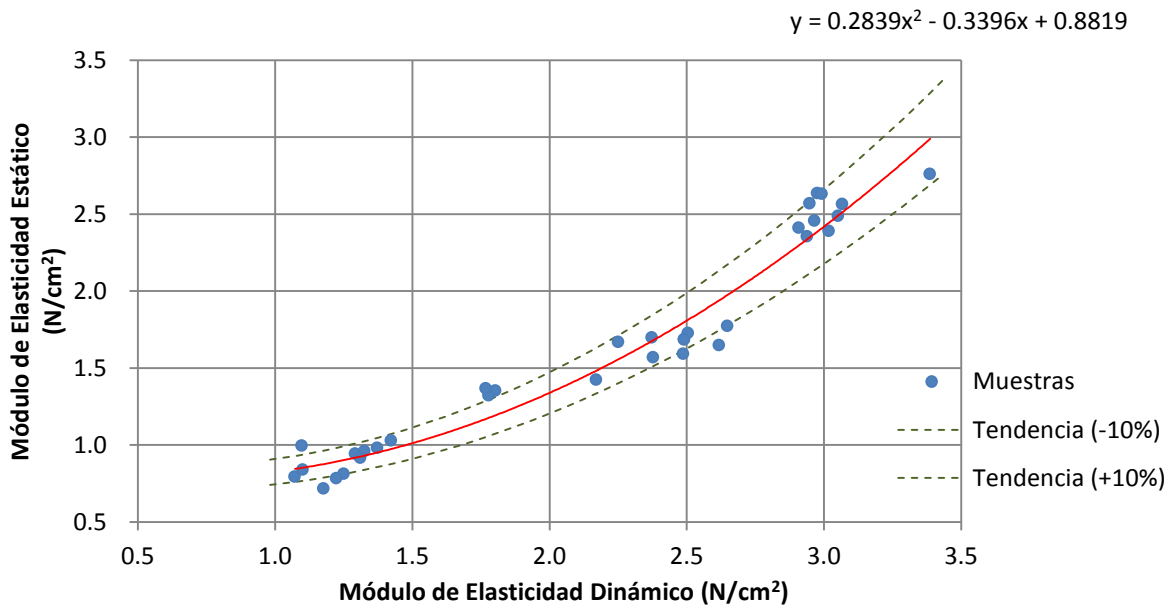


**Gráfica 5.1.** Módulo de elasticidad estático contra módulo dinámico

Se destaca que para los especímenes considerados no se limitó a ningún tipo de agregado grueso o fino, ni a solo una determinada resistencia a la compresión, tomando de forma aleatoria las características de los cilindros ensayados, siendo la única constante la materia prima para la elaboración de los mismos provenientes de la ciudad de Guadalajara, Jalisco y zonas aledañas; y que todos los cilindros fueron ensayados mucho después de los 28 días del colado de los cilindros, pudiendo considerarse que han alcanzado su resistencia a la compresión de diseño.

De esto se concluye que la relación entre ambos módulos es confiable con certeza para los cilindros que cumplan con las mismas características geométricas (15 cm de diámetro y 30 cm de largo), mismas que solicita la norma ASTM C469 [2]. Al haber realizado los ensayos con diferentes resistencias, agregados, sin considerar condiciones de humedad u otros factores externos, variando estos en todos los casos, se concluye que la relación no se ve afectada significativamente por estos parámetros para una estimación confiable.

La Gráfica 5.1 se re-expreso cambiando las unidades de  $\text{kg/cm}^2$  a  $\text{N/cm}^2$  para obtener una fórmula que relacione ambos módulos de manera más práctica y sin riesgo a errores por pérdida de decimales.



**Gráfica 5.2.** Relación entre módulo de elasticidad Estático y módulo Dinámico expresado en ( $\text{N/cm}^2$ )

Quedando finalmente la siguiente expresión:

$$(5.2) \quad E_E = 0.2839 E_D^2 - 0.3396 E_D + 0.8819$$

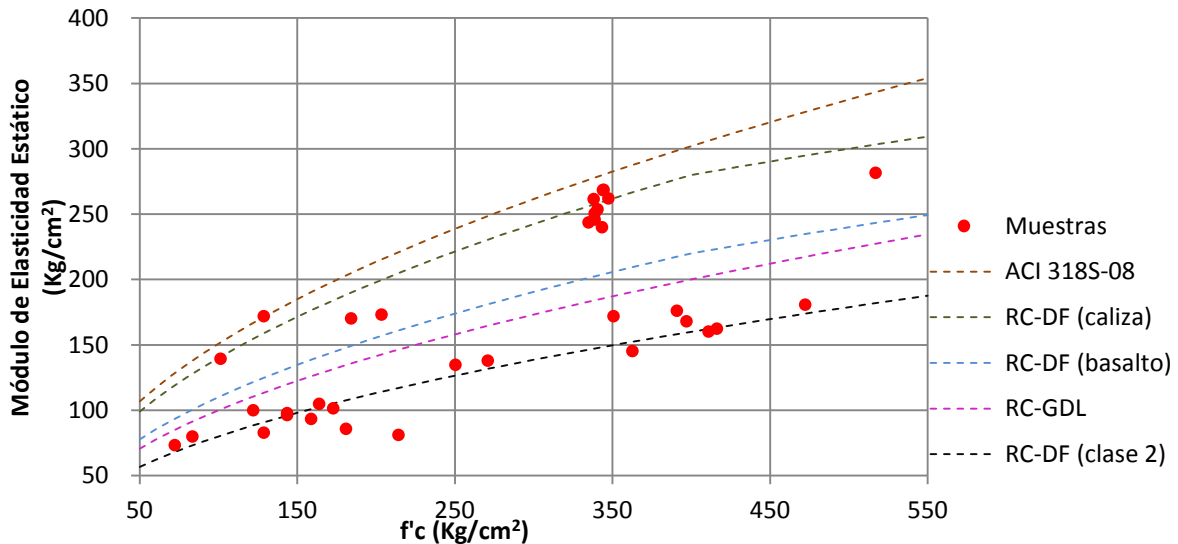
Donde:

$$\begin{aligned} E_E &= \text{Módulo de Elasticidad Estático (N/cm}^2\text{)} \\ E_D &= \text{Módulo de Elasticidad Dinámico (N/cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

Otra de las conclusiones resultado de esta investigación es que los parámetros dados por los reglamentos para la estimación del módulo elástico en función del  $f^c$  se quedan cortos, teniendo grandes discrepancias entre el parámetro y lo realmente medido de los especímenes de concreto. Por lo que se propone no se utilice solamente el  $f^c$  como parámetro de diseño ni se exprese el



módulo de elasticidad requerido en función de este; sino que se traten como dos parámetros independientes dando valores de diseño para el concreto especificando la resistencia mínima a la compresión y el módulo elástico mínimo o máximo (según sea el caso) que se requiera.



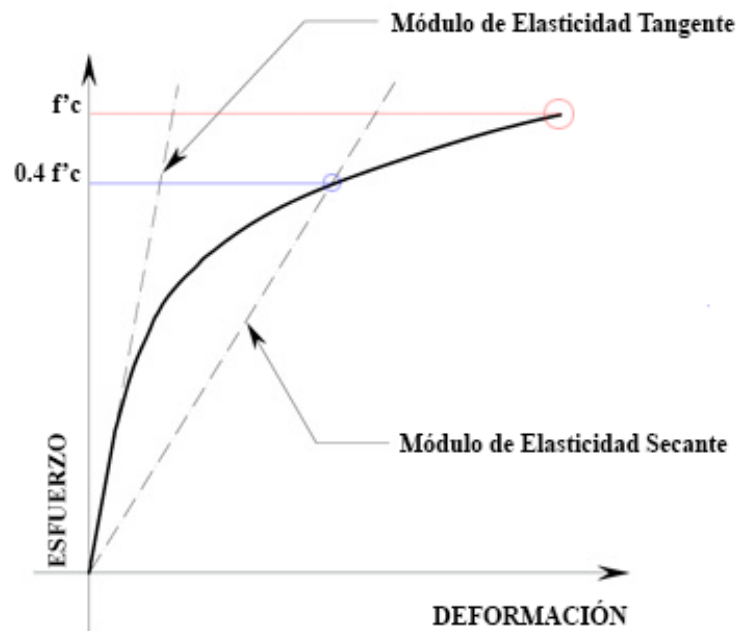
**Gráfica 5.3.** Variabilidad del módulo de elasticidad en función del  $f'_c$ . Se tabulan las relaciones propuestas por diversos reglamentos.

Como se mencionaba en el apartado 1.1 la variación del módulo elástico afecta directamente en el diseño, principalmente para las deformaciones. Por lo que para diseños únicamente gravitacionales se buscaría un módulo de elasticidad mínimo para que cumpla con las deformaciones permitidas por reglamento, mientras que para análisis sísmico podríamos llegar a hablar de un mínimo y un máximo para procurar la estructura se encuentre dentro de una zona específica del espectro, para la cual se diseñó la estructura, para que de esta manera la estructura no sea más rígida o más flexible y por tanto comportándose adecuadamente tal como se diseñó en el caso un evento sísmico.

## 5.1. Investigaciones Afines

No se niega la importancia de las propiedades de la materia prima en la relación entre módulo dinámico y estático, por lo que se puede llegar a afinar la relación encontrada y expresada en (5.2) acotando los ensayos a determinados agregados. Así pues una concretera que desee emplear este método para rápidamente estimar el módulo de elasticidad estático en función del dinámico con una mayor precisión, podría desarrollar una investigación afín a la presente, teniendo un control por agregados y así encontrando una relación aún más fiel.

Se observa que el módulo de elasticidad dinámico es mayor al módulo de elasticidad estático, se supone esta discrepancia es debido a que el módulo estático es obtenido mediante una recta secante del origen de la gráfica esfuerzo deformación, como la que se observa en la Gráfica 5.4. Por otro lado después de haber observado el comportamiento de los valores de módulo dinámico contra el estático, se tiene la nueva hipótesis que el módulo de elasticidad dinámico corresponde a la pendiente tangente inicial de la curva de esfuerzo-deformación.



**Gráfica 5.4.** Ilustración que ejemplifica la obtención del Módulo de elasticidad estático

Por lo que se puede realizar una nueva investigación enfocada en demostrar o refutar esta hipótesis, siguiendo el procedimiento aquí seguido para la obtención del módulo de elasticidad dinámico y obteniendo la curva de esfuerzo-deformación tomando mediciones a bajos esfuerzos con gran definición y de forma continua.

Por último se podría ahondar en el impacto de una mala estimación del módulo de elasticidad del concreto en el diseño de edificios altos, con periodos de vibración mayor a uno, donde la flexibilidad juegue un papel importante. Con la finalidad de poder dar un parámetro porcentual de cuanto puede variar un módulo de elasticidad del propuesto por el estructurista para que la estructura se pueda seguir considerando segura y cumpla con la reglamentación disponible.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] ACI, *Requisitos de Reglamento para Concreto Estructural (ACI 318S-11)*, Comité ACI 318, 2011.
- [2] ASTM International, *C 469 Standard Test Method for Static Modulus of Elasticity and Poisson's Ratio of Concrete in Compression*, American Society for Testing and Materials, 2002.
- [3] S. Boone, «A Comparison Between the Compressive Strength and the Dynamic Properties of Concrete as Function of Time - Master's Thesis,» University of Tennessee, 2005.
- [4] J. Rayleigh, *Theory of Sound*, New York: Dover Press, 1945.
- [5] T. Powers, «"Measuring Young's Modulus of Elasticity by Means of Sonic Vibrations",» *Proceedings*, vol. 38, nº Part II, 1938.
- [6] F. Hornibrook, «"Application of Sonic Method to Freezing and Thawing Studies of Concrete,» *ASTM Bulletin*, vol. 101, December 1939.
- [7] W. Thomson, «"Measuring Changes in Physical Properties of Concrete by the Dynamic Method",» *Proceedings*, vol. 40, 1940.
- [8] L. Orbert y Duvall, W.I., «Discussion of Dynamic Methods of Testing Concrete with Suggestions for Standardization",» *Proceedings*, vol. 41, 1941.
- [9] T. Stanton, «Tests Comparing the Modulus of Elasticity of Portland Cement Concrete as Determined by the Dynamic (Sonic) and Compression (Secant at 1000 psi) Methods,» *ASTM Bulletin*, vol. 131, 1944.
- [10] ASTM International, *C 215 Standard Test Method for Fundamental Transverse, Longitudinal and Torsional Resonant Frequencies of Concrete Specimens*, American Society for Testing and Materials, 1997.
- [11] R. Jones, «Non-Destructive Testing of Concrete,» Cambridge University Press, London, 1962.
- [12] A. Neville, *Properties of Concrete*, 4th ed., Pearson Education Limited, 1995.
- [13] E. Whitehurst, «Evaluation of Concrete Properties from Sonic Tests,» Iowa State University Press, Detroit, 1966.

- [14] V. Malhotra y Carino, N.J., «Resonant Frequency Methods,» de *Handbook on Nondestructive Testing of Concrete*, CRC Press LLC, 2004.
- [15] ONNCCE, *NMX-C-128 Determinación del módulo de elasticidad estático y relación de Poisson*, ONNCCE, 1997.
- [16] T. Plachy, Padevet, P. y Polak, M., «Comparison of Two Experimental Techniques for Determination of Young's Modulus of Concrete Specimens,» de *Recent Advances in Applied and Theoretical Mechanics*, Puerto de la Cruz, 2009.
- [17] R. Philleo, «"Comparison of Results of Three Methods for Determining Youngs Modulus of Elasticity of Concrete,» *ACI Journal Proceedings*, vol. 51, 1955.
- [18] M. Sharma y Gupta, B.L., «Sonic Modulus as Related to Strength and Static Modulus of High Strength Concrete,» *The Indian Concrete Journal (Bombay)*, vol. 34, n° 4, Abril 1960.
- [19] P. Klieger, «Long-Time Study of Cement Performance in Concrete. Chapter 10 - Progress Report on Strength and Elastic Properties of Concrete,» *ACI Journal, Proceedings*, vol. 54, n° 6, 1957.
- [20] ASTM International, *C 39/C39M Standard Test Method for Compressive Strength of Cylindrical Concrete Specimens*, American Society for Testing and Materials, 2003.
- [21] A. Malaikah, Al-Saif, K. y Al-Zaid, R., «Prediction of the Dynamic Modulus of Elasticity of Concrete under Different Loading Conditions,» de *International Conference on Concrete Engineering and Technology*, Malaya, 2004.
- [22] J. Nichols y Totoev, Y.Z., «Experimental determination of the dynamic Modulus of Elasticity of masonry units,» Department of Civil, Surveying and Environmental Engineering, Callaghan.
- [23] L. Vásquez, «Estudio y caracterización mediante ensayos no destructivos con ultrasonido de materiales compuestos concreto - raspadura de caucho (ripio). Trabajo especial de grado,» Universidad Central de Venezuela, Caracas, 2003.
- [24] H. Yoshihara, *Measurement of Young's Modulus and Shear Modulus of in-plane Quasi-Isotropic Medium-Density Fiberboard by Flexural Vibration*, BioResources, 2011.
- [25] B. Ortiz, *Resistencia de materiales*, Madrid: McGraw Hill, 1990.
- [26] A. Kassimali, *Matrix Analysis of Structures*, CL Engineering, 1999.

- [27] C. Tena, *Análisis de estructuras con métodos matriciales*, México: LIMUSA, 2007.
- [28] Gobierno del Distrito Federal, «Gaceta oficial del Distrito Federal,» *Normas Técnicas Complementarias sobre criterios y acciones para el diseño estructural de las edificaciones*, pp. 2-10, 6 Octubre 2004.
- [29] ASTM International, *C 192/C 192M Standard Practice for Making and Curing Concrete Test Specimens in the Laboratory*, American Society for Testing and Materials, 2002.
- [30] ASTM International, *C 31/C 31M Standard Practice for Making and Curing Concrete Test Specimens in the Field*, American Society for Testing and Materials, 2003.
- [31] ASTM International, *C 617-03 Standard Practice for Capping Cylindrical Concrete Specimens*, American Society for Testing and Materials, 2003.
- [32] A. Pauw, «Static Modulus of Elasticity of Concrete as Affected by Density,» *ACI Journal*, vol. 57, n° 6, pp. 679-687, 1960.
- [33] Gobierno del Distrito Federal, «Gaceta Oficial del Distrito Federal,» *Normas Técnicas Complementarias para diseño y construcción de Estructuras de Concreto*, pp. 88-194, 6 Octubre 2004.
- [34] Laboratorio de Investigación del Posgrado de Ingeniería Civil. Universidad de Guadalajara, *Reglamento Orgánico del Municipio de Guadalajara. Apartado Sexto. Título Décimo Tercero de la Seguridad Estructural de las Construcciones*, Zona Olímpica, Guadalajara: H. Ayuntamiento CONstitucional de Guadalajara, 1998.
- [35] A. Chopra, *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*, Prentice Hall, 1995.
- [36] G. Zill, *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones*, Grupo Editorial Iberoamérica, 1986.
- [37] G. Hurtado, *Introducción a la Dinámica de Estructuras*, Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales, 2000.
- [38] C. Gómez, *Análisis Sísmico Moderno*, Editorial Trillas, 2007.
- [39] Richart, F.E.Jr., Hall, J.R.Jr. and Woods, R.D., *Vibrations of Soils and Foundations*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1970.
- [40] S. Singiresu, *Mechanical Vibrations*, Upper Saddle, N.J.: Prentice Hall, 2004.

- [41] A. Oppenheim, Willsky, A.S. y Nawab, S.H., *Señales y Sistemas*, Naucalpan de Juárez, Edo. de México: Prentice Hall Hispanoamericana, 1997.
- [42] J. Bobadilla, Gómez, P. y Bernal, J., *La Transformada de Fourier. Una visión pedagógica.*, Madrid: Departamento de Arquitectura y Tecnología de Sistemas Informáticos, Universidad Politécnica de Madrid.
- [43] A. Zonst, *Understanding the Fast Fourier Transform: A Tutorial on the Algorithm & Software for Laymen, Students, Technicians & Working Engineers*, Titusville, Florida: Citrus Press.
- [44] G. Rodríguez y Bonal, C.R., «El contenido de agua en el concreto y su incidencia sobre el valor de la velocidad de pulso ultrásónico,» de *XXI Congreso Nacional de Ensaïos Nao Destructivos\_CONAEND 2002*, Salvador/BA, 2002.
- [45] R. Solis, Moreno, E. y Castillo, W., «Construcción y Tecnología en Concreto,» *Resistencia del concreto basada en la velocidad de pulso ultrasónico*, p. 12, 1 Agosto 2011.
- [46] F. Rodríguez y Rodríguez, G.M., «Dependencia de la velocidad del pulso ultrasónico con el contenido de agua libre en la estructura de hormigón en condiciones de clima tropical,» *Materiales de Construcción*, vol. 62, nº 305, pp. 39-53, 2012.
- [47] Chávez, G.H.L., Martínez, M.W., Alonso, G.E.M. y González, S.F., «Empleo de técnicas no destructivas de ultrasonido para la caracterización del concreto hidráulico,» *Ciencia Nicolaita*, vol. 52, pp. 115-128, 2010.
- [48] K. Wight y Schaeffer, C.T., *Requisitos del reglamento para concreto estructural*, ACI, 2008.
- [49] G. Pickett, "Equations for Computing Elastic Constants from Flexural and Torsional Resonant Frequencies of Vibration of Prism and Cylinders," *Proceedings American Society Testing Materials*, vol. 45, pp. 846-863, 1945.
- [50] W. Thomson, «Measuring Changes in Physical Properties of Concrete by the Dynamic Method,» *Proceedings*, vol. 40, 1940.
- [51] J. Sansalone y B. W. Streett, *Impact Echo: Nondestructive Evaluation of Concrete and Masonry*.